

ประเภทโครงการวิจัย: การพัฒนาการทดลอง

รายงานผลการวิจัย

เรื่อง

การประยุกต์ใช้โปรแกรม SCILAB เพื่อการสอนวิชาการระเบียบวิธีเชิงเลข

Application of SCILAB Program to Numerical Method
Instruction

โดย

นาย ปรีชา สาคะรังค์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ

รายงานการวิจัยนี้ได้รับทุนอุดหนุนจาก มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ

พ.ศ. 2558

สารบัญ

	หน้า
บทที่ 1	1
บทที่ 2	3
บทที่ 3	48
บทที่ 4	91
บทที่ 5	95

สวพ.
มทร.สุวรรณภูมิ

บทที่ 1

บทนำ

บทนี้กล่าวแนะนำถึงความสำคัญและที่มาของปัญหา วัตถุประสงค์ของโครงการ ขอบเขตของการวิจัย ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ ดังมีรายละเอียดดังนี้

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

ปัญหาใหญ่อย่างหนึ่งที่พบในการสอนวิชาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขคือ การเริ่มต้นเขียนโปรแกรมจะต้องทำอะไร เมื่อต้องการแปลงจากอัลกอริธึมที่ต้องการในระเบียบวิธีเชิงตัวเลขไปเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ การเลือกภาษาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เป็นเรื่องที่สำคัญ โดยทั้งนี้โปรแกรมดังกล่าวควรใช้งานง่ายและต้องมีราคาถูกเพื่อให้เหมาะสมกับมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ

โปรแกรม SCILAB มีการสั่งงานและสภาพการใช้งานคล้ายโปรแกรม MATLAB แต่ไม่มีค่าใช้จ่ายเพราะเป็นโปรแกรมที่ไม่คิดค่าลิขสิทธิ์ ซึ่งมีความสามารถในการคำนวณแบบเมทริกซ์และมีโครงสร้างการเขียนโปรแกรมคล้ายภาษา C การนำเอาโปรแกรม SCILAB มาใช้ในการสอนต้องใช้ควบคู่กับการเขียนผังงานการทำงานแบบรูปภาพเพื่อให้เข้าใจการทำงานเบื้องต้น และต้องทำการคำนวณด้วยเครื่องคิดเลขอย่างน้อย 3 - 4 รอบการทำซ้ำโดยมีวัตถุประสงค์เพื่อตรวจสอบการคำนวณให้ถูกต้องตรงกันทั้งอัลกอริธึม ผังงานการทำงานแบบรูปภาพและชุดโปรแกรมการคำนวณ

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการ

1. เพื่อศึกษาอัลกอริธึมการคำนวณแบบต่างๆ ในระเบียบวิธีเชิงเลข และสร้างผังการทำงานแบบรูปภาพ
2. เพื่อศึกษาและสร้างชุดของโปรแกรมสำหรับใช้ประกอบการสอนวิชาระเบียบวิธีเชิงเลข

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

สร้างชุดของโปรแกรมสำหรับใช้ประกอบการสอนวิชาระเบียบวิธีเชิงเลขโดยใช้โปรแกรม SCILAB ในหัวข้อดังนี้

1.3.1 การหารากของสมการด้วย ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง ระเบียบวิธีการวางตัวผิตรี ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบหนึ่งจุด ระเบียบวิธีของนิวตัน-ราฟสัน ระเบียบวิธีเซแคนต์

1.3.2 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วย ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์แบบปรับปรุงด้วยการเลือกตัวหลักและการจัดสเกล ระเบียบวิธีของเกาส์-ซอร์ดอง ระเบียบวิธีการทำเมทริกซ์ผกผัน ระเบียบวิธีการแยกแบบแอลยู ระเบียบวิธีการแยกแบบโฮเลสกี ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบยาโคบี ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดล ระเบียบวิธีการผ่อนปรนเกินสปีนนิ่ง

1.3.3 การประมาณค่าในช่วงด้วย ผลต่างจากการแบ่งย่อยของนิวตัน ฟังก์ชันพหุนามของลากรานจ์ โดยพิจารณาทั้งการประมาณค่าในช่วงเชิงเส้น การประมาณค่าในช่วงเชิงกำลังสอง และการประมาณค่าในช่วงฟังก์ชันพหุนามโดยทั่วไป

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ได้สื่อการสอนวิชาการเปียโนวิธีเชิงเลขในหัวข้อเรื่อง

1.4.1 การหารากของสมการ

1.4.2 การแก้ระบบสมการเชิงเส้น

1.4.3 การประมาณค่าในช่วง

สวพ.
มทร.สุวรรณภูมิ

บทที่ 2

หลักการเบื้องต้น

บทนี้จะกล่าวถึงโปรแกรม SCILAB ที่ใช้ในการจำลอง และอัลกอริธึมการคำนวณแบบต่างๆ ในระเบียบวิธีเชิงเลขซึ่งครอบคลุม

1. การหารากของสมการด้วย ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง ระเบียบวิธีการวางตัวผิวดที่ ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบหนึ่งจุด ระเบียบวิธีของนิวตัน-ราฟสัน ระเบียบวิธีเซแคนต์
2. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วย ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์แบบปรับปรุงด้วยการเลือกตัวหลักและการจัดสเกล ระเบียบวิธีของเกาส์-ซอร์ดอง ระเบียบวิธีการทำเมทริกซ์ผกผัน ระเบียบวิธีการแยกแบบแอลยู ระเบียบวิธีการแยกแบบโคเลซกี ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบยาโคบี ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดล ระเบียบวิธีการผ่อนปรนเกินสปีบเนื่อง
3. การประมาณค่าในช่วงด้วย ฟังก์ชันพหุนามของลากรานจ์ ผลต่างจากการแบ่งย่อยของนิวตัน โดยพิจารณาทั้งการประมาณค่าในช่วงเชิงเส้น การประมาณค่าในช่วงเชิงกำลังสอง และการประมาณค่าในช่วงฟังก์ชันพหุนามโดยทั่วไป

2.1 โปรแกรม SCILAB

โปรแกรม SCILAB คือโปรแกรมคำนวณทางคณิตศาสตร์ที่มีเครื่องมือและสิ่งสนับสนุนเบื้องต้นที่เหมาะสมสำหรับใช้ในงานทางด้านวิทยาศาสตร์และวิศวกรรม โปรแกรม SCILAB เป็นโปรแกรมแบบเปิด ภายใต้ CeCILL license (GPL compatible) จึงไม่มีค่าใช้จ่าย ซึ่งสามารถเข้าถึงรวมทั้งเอาไฟล์โปรแกรมได้ที่ <http://www.scilab.org/> และรุ่นของโปรแกรมที่เป็นปัจจุบันคือ SCILAB 5.5.1

โปรแกรม SCILAB มีฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ (จำนวนหลายร้อย) อยู่ภายใน และประกอบด้วยมีโครงสร้างภาษาที่ทำให้สามารถทำงานได้กับข้อมูลเชิงเมทริกซ์ จึงมีความสามารถหลากหลายดังตัวอย่าง

2.1.1 คณิตศาสตร์และการจำลอง

สำหรับนักวิทยาศาสตร์และวิศวกร เพื่อใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลและการทำงานเกี่ยวกับคณิตศาสตร์

2.1.2 การแสดงกราฟิกแบบ 2 มิติ และ 3 มิติ

มีฟังก์ชันสำหรับแสดงผลแบบกราฟิกหลายแบบทั้ง 2 มิติ และ 3 มิติ การแลกเปลี่ยนข้อมูลทั้งนำเข้าและส่งออกสามารถทำได้

2.1.3 คณิตศาสตร์สถิติ

มีฟังก์ชันสำหรับการสร้างแบบจำลองและวิเคราะห์ข้อมูลเชิงสถิติ

2.1.4 การวิเคราะห์และออกแบบระบบควบคุม

มีเครื่องมือและอัลกอริธึมมาตรฐานสำหรับการศึกษาด้านระบบควบคุม

2.1.5 การประมวลผลทางสัญญาณ

มีฟังก์ชันสำหรับการวิเคราะห์ และแสดงผลแบบกราฟิกหลายแบบ ทั้งในโดเมนเวลาและโดเมนความถี่

2.1.6 Xcos การจำลองระบบพลศาสตร์แบบผสมในรูปแบบกราฟิก

มีบล็อกไดอะแกรมการจำลองของระบบต่างๆ เช่น ระบบทางกล ระบบควบคุม ฯลฯ สำหรับการใช้งานเบื้องต้นสามารถอ่านได้ที่ [1-2]

2.2 อัลกอริธึมการคำนวณ

2.2.1 การหารากของสมการ

2.2.1.1 ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง

การหารากของสมการก็คือการหาคำตอบของสมการ (2-1) นั้นเอง ซึ่งเป็นพื้นฐานของการแก้สมการคณิตศาสตร์

$$f(x) = 0 \quad (2-1)$$

ทดลองหาคำตอบของ $f(x) = e^{-\frac{x}{4}}(2-x) - 1 = 0$ โดยเขียนโปรแกรมดังรูป 2.1 และได้ผลลัพธ์ดังรูป 2.2ก) เมื่อกำหนดให้ x คือคำตอบซึ่งก็คือจุดที่ตัดแกน x เมื่อดูรูป 2.2ข) จะพบว่าที่ค่า x_L จะทำให้ $f(x_L) > 0$ และที่ค่า x_R จะทำให้ $f(x_R) < 0$

```
deff('f(x)=FUNC(x)','y=exp(-x/4.0)*(2.-x)-1.');
```

```
x=[-1:0.01:3];
```

```
d=size(zeros(x));
```

```
for i=1:d(1,2)
```

```
    y(:,i)=FUNC(x(:,i));
```

```
end
```

```
plot(x,y,'black')
```

รูป 2.1 โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้วาดกราฟ $f(x) = e^{-\frac{x}{4}}(2-x) - 1 = 0$ (root_finding.sci)

ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วงมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ตรวจสอบว่า $f(x_L)$ และ $f(x_R)$ จากค่าที่กำหนดตอนเริ่มต้น (x_L, x_R) มีเครื่องหมายตรงกันข้ามหรือไม่ ($f(x_L) \cdot f(x_R) < 0$)

ขั้นตอนที่ 2 คำนวณค่าเฉลี่ย x_M จากค่าที่กำหนดตอนเริ่มต้น ดังสมการ (2-2)

$$x_M = \frac{x_L + x_R}{2} \quad (2-2)$$

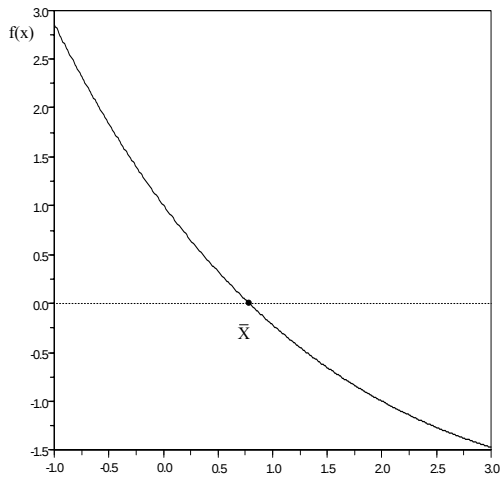
ขั้นตอนที่ 3 เพื่อบีบช่วงให้แคบลง จึงแทนค่า x_M ใน x_R หรือ x_L ดังเงื่อนไข

$$(f(x_M) \cdot f(x_R) > 0) \quad \text{ให้แทนค่า } x_M \text{ ใน } x_R \text{ หรือ}$$

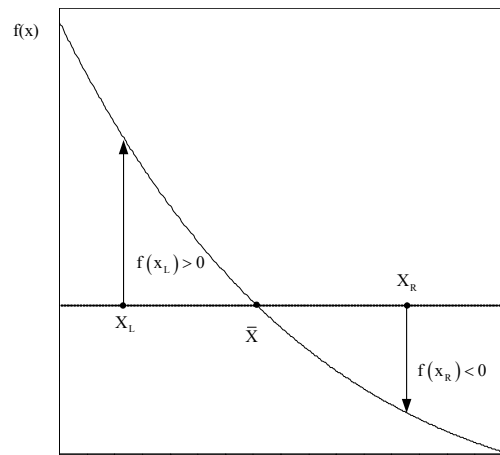
$$(f(x_M) \cdot f(x_R) < 0) \quad \text{ให้แทนค่า } x_M \text{ ใน } x_L$$

ขั้นตอนที่ 4 ตรวจสอบค่า x_M ที่ได้ว่าต่ำกว่าเกณฑ์ที่ยอมรับ (ε) หรือยัง ถ้ายังก็กลับไปทำในขั้นตอนที่ 1 ต่อ

$$|f(x)| < \varepsilon$$



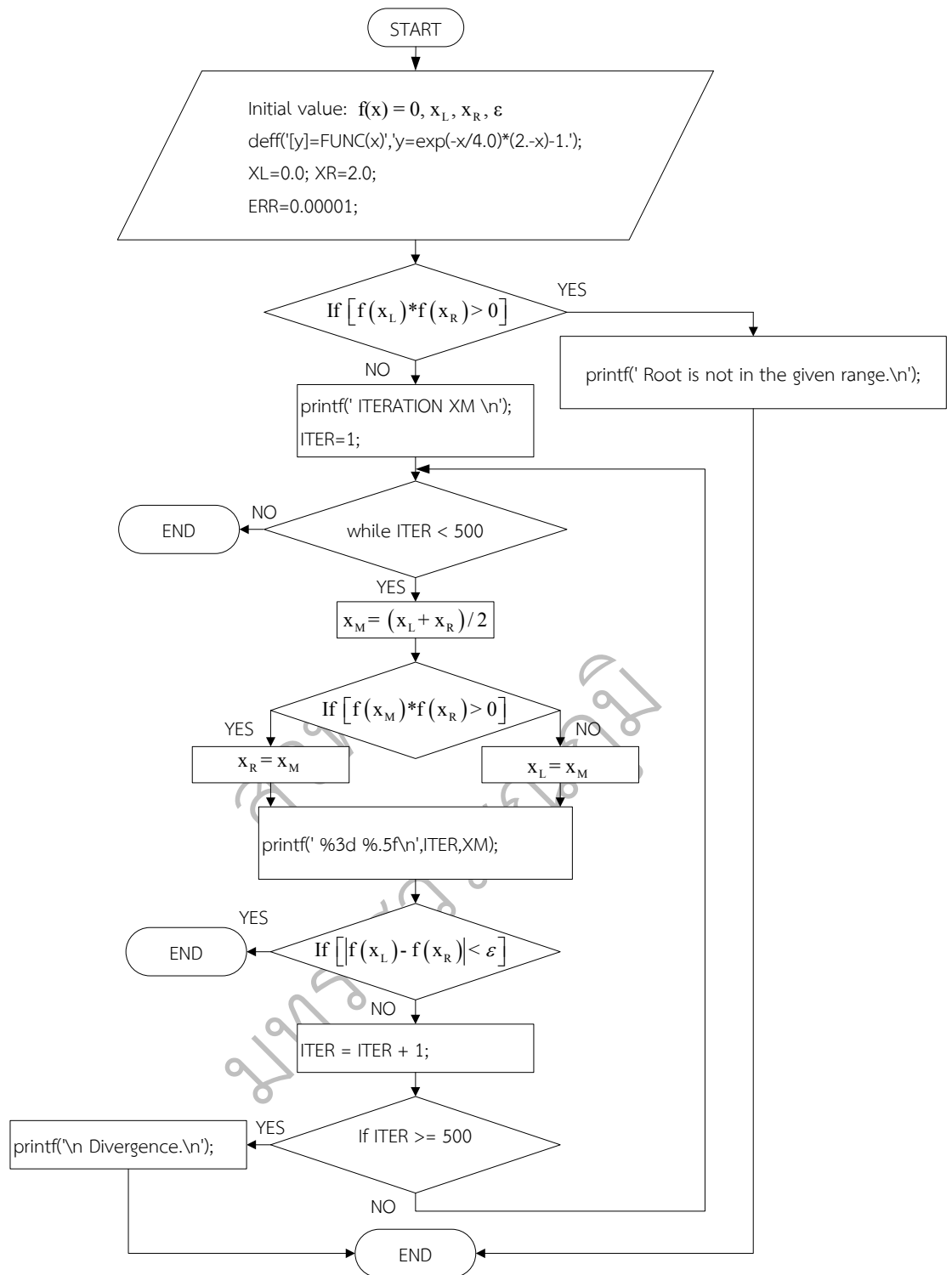
ก)



ข)

รูป 2.2 ก) กราฟ $f(x) = e^{-x/4}(2-x) - 1 = 0$ ข) ตำแหน่งของ $f(x_L) > 0$ และ $f(x_R) < 0$

จากขั้นตอนของระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง จึงสามารถนำมาเขียนเป็นผังงานได้ดังรูป 2.3



รูป 2.3 ผังงานระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง

2.2.1.2 ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่

การนำเอาข้อมูลของค่าความชันมาช่วยกำหนดจุดใหม่ (x_f) เพื่อที่จะให้แทนค่า x_L หรือ x_R นั้นส่งผลทำให้จำนวนรอบในการคำนวณลดลง จาก [3] ค่า x_f หาได้จากสมการ (2-3)

$$x_f = \frac{(x_R * f(x_L)) - (x_L * f(x_R))}{f(x_L) - f(x_R)} \quad (2-3)$$

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ตรวจสอบว่า $f(x_L)$ และ $f(x_R)$ จากค่าที่กำหนดตอนเริ่มต้น (x_L, x_R) มีเครื่องหมายตรงกันข้ามหรือไม่ ($f(x_L) \cdot f(x_R) < 0$)

ขั้นตอนที่ 2 คำนวณค่าเฉลี่ย x_f จากค่าที่กำหนดตอนเริ่มต้น ดังสมการ (2-3)

ขั้นตอนที่ 3 เพื่อปิดช่วงให้แคบลง จึงแทนค่า x_f ใน x_R หรือ x_L ดังเงื่อนไข

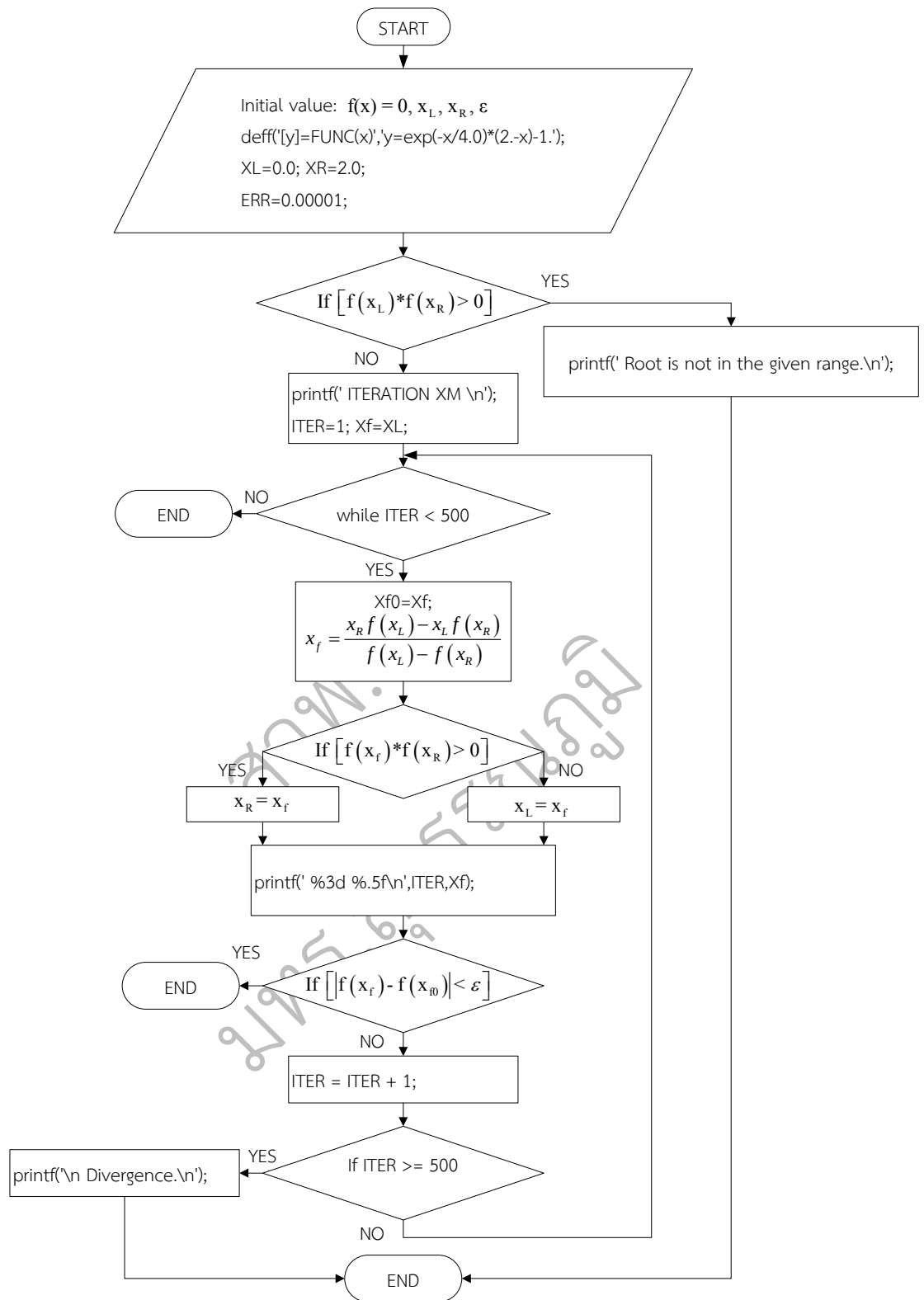
$$(f(x_f) \cdot f(x_R) > 0) \quad \text{ให้แทนค่า } x_f \text{ ใน } x_R \text{ หรือ}$$

$$(f(x_f) \cdot f(x_R) < 0) \quad \text{ให้แทนค่า } x_f \text{ ใน } x_L$$

ขั้นตอนที่ 4 ตรวจสอบค่า x_f ที่ได้ว่าต่ำกว่าเกณฑ์ที่ยอมรับ (ε) หรือยัง ถ้ายังก็กลับไปทำในขั้นตอนที่ 1 ต่อ

$$|f(x)| < \varepsilon$$

จากขั้นตอนของระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่จึงสามารถนำมาเขียนเป็นผังงานได้ดังรูป 2.4



รูป 2.4 ผังงานระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่

2.2.1.3 ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบหนึ่งจุด

การจัดสมการให้อยู่ในรูปแบบของตัวแปรที่ต้องการหาค่าอยู่ด้านซ้ายของสมการเพียงตัวเดียว และเทอมที่เหลือย้ายไปอยู่ทางด้านขวาของสมการ ดังสมการ (2-4)

$$x = f(x) + b \quad (2-4)$$

เมื่อ b คือค่าคงที่ใดๆ

จาก $f(x) = e^{-\frac{x}{4}}(2-x) - 1 = 0$ สามารถจัดสมการใหม่ได้ดังนี้

$$e^{-\frac{x}{4}}(2-x) = 1$$

$$(2-x) = 1e^{\frac{x}{4}}$$

จะได้ $x = 2 - 1e^{\frac{x}{4}}$ หรือเขียนสมการในแบบของการคำนวณซ้ำเป็นรอบๆ $x_{i+1} = 2 - 1e^{\frac{x_i}{4}}$

ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบหนึ่งจุดมีขั้นตอนดังนี้

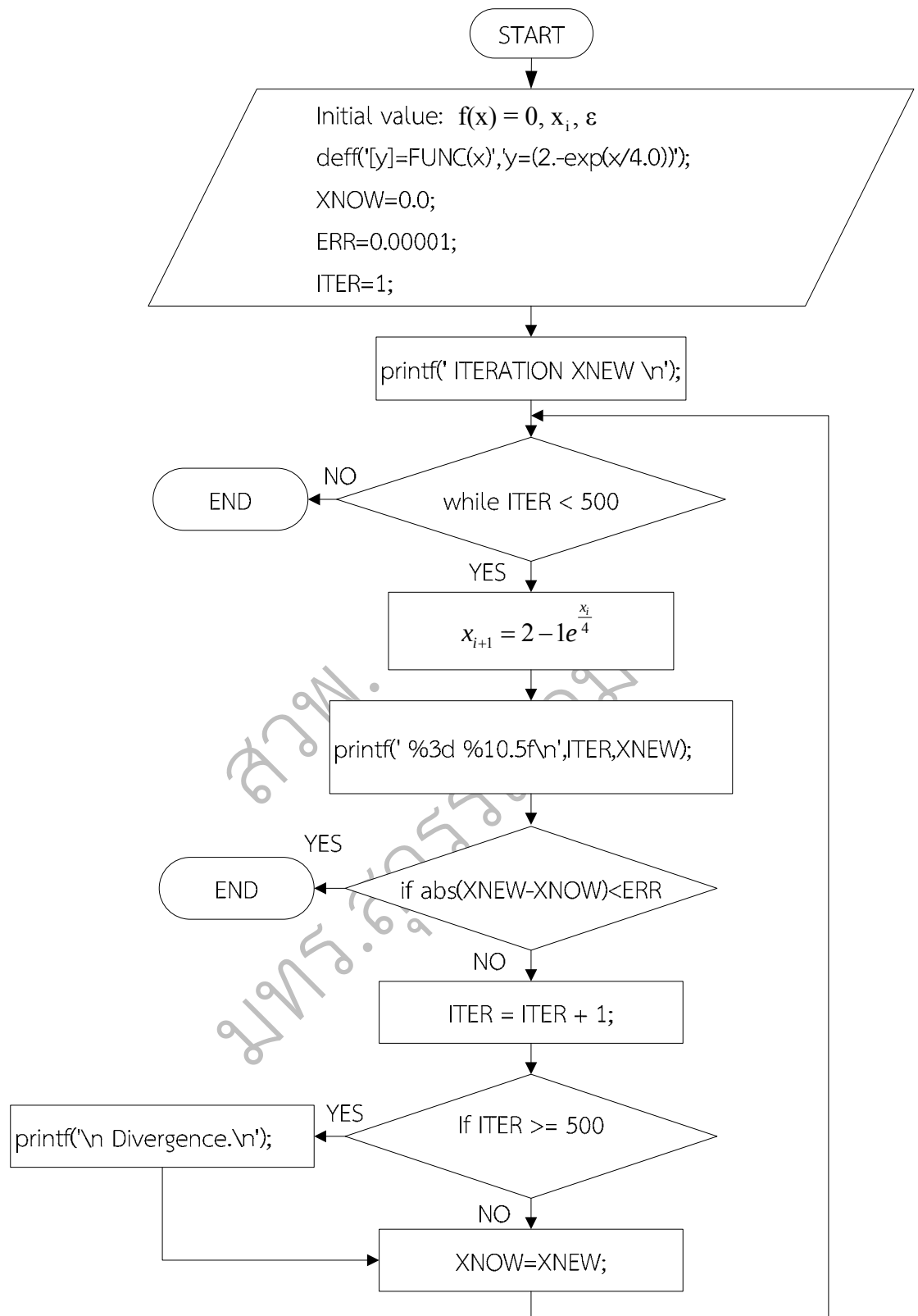
ขั้นตอนที่ 1 กำหนดค่าตอนเริ่มต้นของ x_i และค่าเกณฑ์ที่ยอมรับ (ε)

ขั้นตอนที่ 2 คำนวณค่าตัวแปรในรอบถัดไป ในรูปแบบของสมการ (2-4)

ขั้นตอนที่ 3 ตรวจสอบค่าผลต่างของรอบการคำนวณปัจจุบันและรอบการคำนวณก่อนหน้า ($x_{i+1} - x_i$) ที่ได้ว่าต่ำกว่าเกณฑ์ที่ยอมรับ (ε) หรือยัง ถ้ายังก็กลับไปทำในขั้นตอนที่ 1 ต่อ

$$|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$$

จากขั้นตอนของระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบหนึ่งจุดจึงสามารถนำมาเขียนเป็นผังงานได้ดังรูป 2.5



รูป 2.5 ผังงานระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบหนึ่งจุด

2.2.1.4 ระเบียบวิธีของนิวตัน-ราฟสัน

ระเบียบวิธีของนิวตัน-ราฟสันคือ การแทนสมการให้อยู่ในรูปของอนุกรมเทย์เลอร์และเขียนเฉพาะสองพจน์ หรือเรียกว่าการประมาณอันดับหนึ่ง ดังสมการ (2-5)

$$f(x) \cong f(x_0) + (x - x_0) \frac{df(x_0)}{dx} \quad (2-5)$$

เมื่อหาค่าราก $f(x) = 0$ สามารถทำได้โดยมีขั้นตอนดังนี้

$$f(x_0) + (x - x_0) \frac{df(x_0)}{dx} = 0$$

$$(x - x_0) \frac{df(x_0)}{dx} = -f(x_0)$$

$$(x - x_0) = -\frac{f(x_0)}{\frac{df(x_0)}{dx}}$$

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{\frac{df(x_0)}{dx}}$$

หรือเขียนในรูปแบบ $x = x_0 + \Delta x$ เมื่อ $\Delta x = -\frac{f(x_0)}{\frac{df(x_0)}{dx}}$ (2-6)

จาก $f(x) = e^{-\frac{x}{4}}(2-x) - 1 = 0$ สามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันดังขั้นตอนดังนี้

$$\frac{df(x)}{dx} = e^{-\frac{x}{4}}(-1) + (2-x)\left(-\frac{1}{4}\right)e^{-\frac{x}{4}}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = -e^{-\frac{x}{4}} + \left(\frac{x}{4} - 0.5\right)e^{-\frac{x}{4}}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = -1.5e^{-\frac{x}{4}} + \frac{x}{4}e^{-\frac{x}{4}}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = -e^{-\frac{x}{4}}\left(1.5 - \frac{x}{4}\right)$$

ระเบียบวิธีของนิวตัน-ราฟสันมีขั้นตอนดังนี้

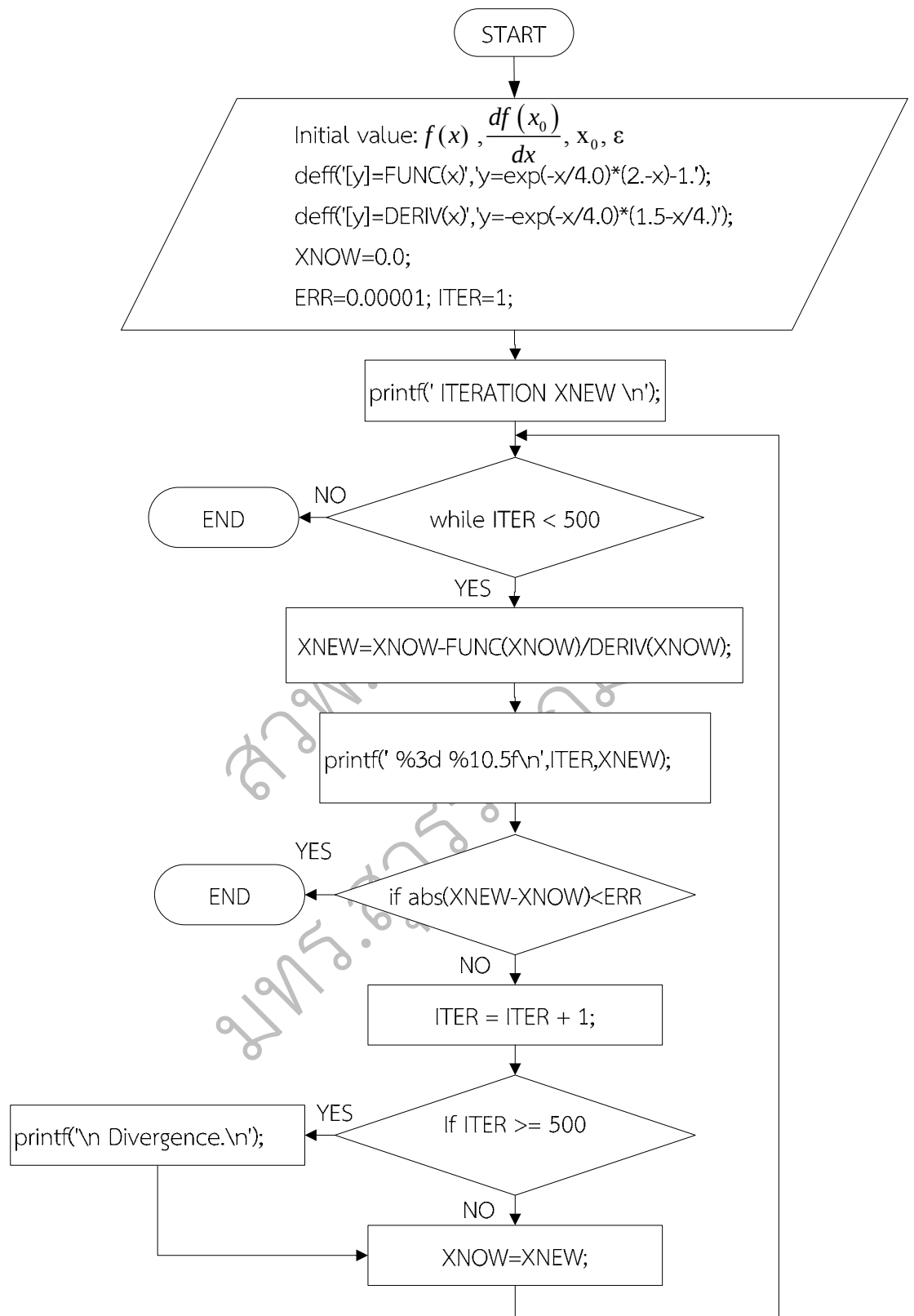
ขั้นตอนที่ 1 กำหนดค่าฟังก์ชันและอนุพันธ์ของฟังก์ชันและค่าตอนเริ่มต้นของ x_{now} และค่าเกณฑ์ที่ยอมรับ (ε)

ขั้นตอนที่ 2 คำนวณค่าตัวแปร $\Delta x = -\frac{f(x_0)}{\frac{df(x_0)}{dx}}$ และ $x = x_0 + \Delta x$

ขั้นตอนที่ 3 ตรวจสอบค่าผลต่างของรอบการคำนวณปัจจุบันและรอบการคำนวณก่อนหน้า $(x_{i+1} - x_i)$ ที่ได้ต่ำกว่าเกณฑ์ที่ยอมรับ (ε) หรือยัง ถ้ายังก็กลับไปทำในขั้นตอนที่ 1 ต่อ

$$|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$$

จากขั้นตอนของระเบียบวิธีของนิวตัน-ราฟสันจึงสามารถนำมาเขียนเป็นผังงานได้ดังรูป 2.6



รูป 2.6 ฟังก์ชันระเบียบวิธีของนิวตัน-ราฟสัน

2.2.1.5 ระเบียบวิธีเซแคนต์

จากรูป 2.7 การแทนอนุพันธ์ของฟังก์ชันด้วยค่าสมการความชัน (2-7)

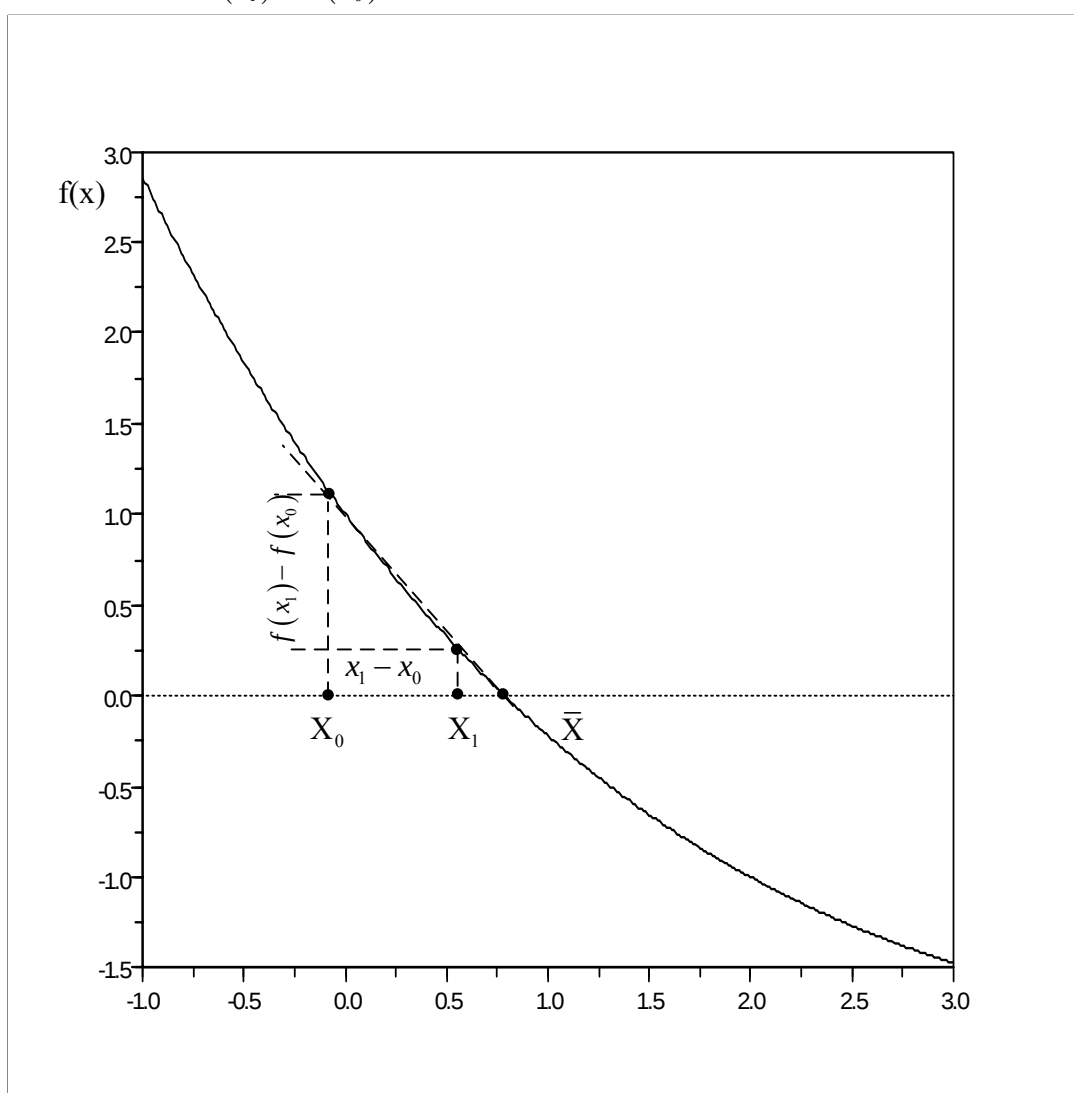
$$\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} \quad (2-7)$$

และจากสมการ (2-6) เมื่อแทนสมการ (2-7) ลงไปจะได้

$$\Delta x = - \frac{f(x_1)}{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}}$$

หรือ

$$\Delta x = - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$



รูป 2.7 การแทนอนุพันธ์ของฟังก์ชันด้วยค่าสมการความชัน

ระเบียบวิธีเซแคนต์มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 กำหนดค่าฟังก์ชัน ค่าตอนเริ่มต้นสองค่า ($x_{\text{OLD}}, x_{\text{NOW}}$) และค่าเกณฑ์ที่ยอมรับ (ε)

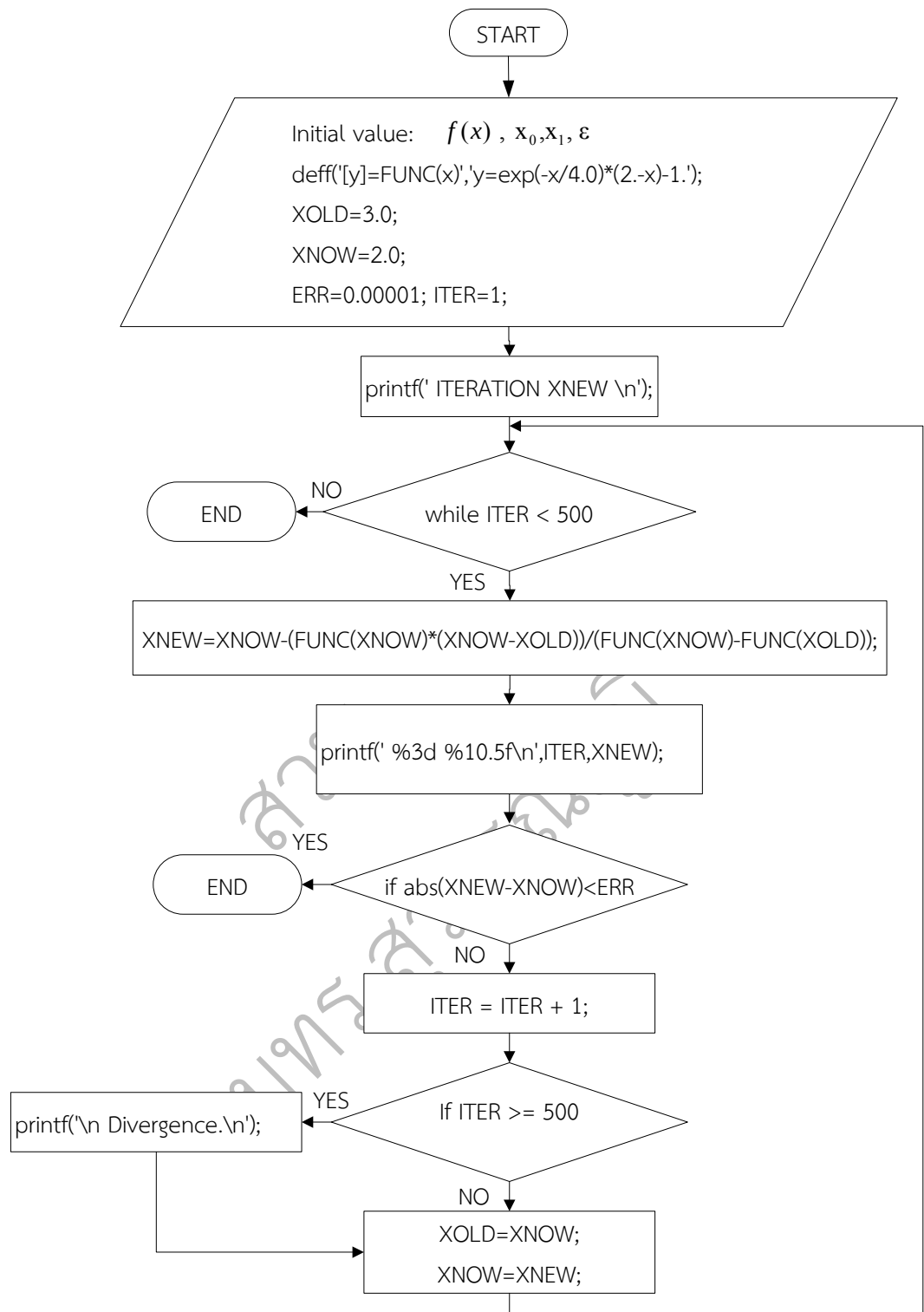
ขั้นตอนที่ 2 คำนวณค่าตัวแปร $\Delta x = -\frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$ และ $x = x_0 + \Delta x$

ขั้นตอนที่ 3 ตรวจสอบค่าผลต่างของรอบการคำนวณปัจจุบันและรอบการคำนวณก่อนหน้า ($x_{i+1} - x_i$) ที่ได้ว่าต่ำกว่าเกณฑ์ที่ยอมรับ (ε) หรือยัง ถ้ายังก็กลับไปทำในขั้นตอนที่ 1 ต่อ

$$|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$$

จากขั้นตอนของระเบียบวิธีเซแคนต์จึงสามารถนำมาเขียนเป็นผังงานได้ดังรูป 2.8

สวพ.
มทร.สุวรรณภูมิ



รูป 2.8 ผังงานระเบียบวิธีเซแคนต์

2.2.2 การแก้ระบบสมการเชิงเส้น

2.2.2.1 ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์

ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ เป็นการจัดสมการให้อยู่ในรูปแบบดังรูป 2.9 หรือเรียกว่าการกำจัดไปข้างหน้า (forward elimination) ซึ่งสามารถหาคำตอบได้โดยการแทนย้อนกลับจากสมการหลังสุดไปหาสมการแรกสุด หรือเรียกว่าการแทนค่าย้อนกลับ (back substitution) ดังรูป 2.10

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \end{bmatrix}$$

รูป 2.9 การกำจัดไปข้างหน้า (forward elimination)

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{b''_3}{a''_{33}} \\ x_2 &= \frac{(b'_2 - a'_{23}x_3)}{a'_{22}} \\ x_1 &= \frac{(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)}{a_{11}} \end{aligned}$$

รูป 2.10 การแทนค่าย้อนกลับ (back substitution)

ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์มีขั้นตอนดังนี้ (สมมติให้มีสามสมการดังรูป 2.9)

ขั้นตอนที่ 1 การกำจัดไปข้างหน้า

ขั้นตอนที่ 1.1 นำค่าสัมประสิทธิ์หน้า x_1 คือ a_{11} หาสมาการแรก

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{b_1}{a_{11}} \quad (2-8)$$

ขั้นตอนที่ 1.2 นำค่าสัมประสิทธิ์หน้า x_1 ของสมการสองคือ a_{21} คูณสมการ (2-8)

$$a_{21}x_1 + a_{12} \frac{a_{21}}{a_{11}}x_2 + a_{13} \frac{a_{21}}{a_{11}}x_3 = \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \quad (2-9)$$

ขั้นตอนที่ 1.3 นำค่าสัมประสิทธิ์หน้า x_1 ของสมการสามคือ a_{31} คูณสมการ (2-8)

$$a_{31}x_1 + a_{12} \frac{a_{31}}{a_{11}}x_2 + a_{13} \frac{a_{31}}{a_{11}}x_3 = \frac{a_{31}}{a_{11}}b_1 \quad (2-10)$$

ขั้นตอนที่ 1.4 นำสมการ (2-9) ไปลบออกจากสมการที่สอง และนำสมการ (2-10) ไปลบออกจากสมการที่สามของรูป 2.9 จะได้

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 &= b'_2 \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 &= b'_3 \end{aligned} \quad (2-11)$$

$$\text{โดย } a'_{22} = \left(a_{22} - a_{12} \frac{a_{21}}{a_{11}} \right), a'_{23} = \left(a_{23} - a_{13} \frac{a_{21}}{a_{11}} \right), b'_2 = \left(b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1 \right)$$

$$a'_{32} = \left(a_{32} - a_{12} \frac{a_{31}}{a_{11}} \right), a'_{33} = \left(a_{33} - a_{13} \frac{a_{31}}{a_{11}} \right), b'_3 = \left(b_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} b_1 \right)$$

ขั้นตอนที่ 1.5 นำค่าสัมประสิทธิ์หน้า x_2 คือ a'_{22} หารสมการที่สองของสมการ (2-11)

$$x_2 + \frac{a'_{23}}{a'_{22}} x_3 = \frac{b'_2}{a'_{22}} \quad (2-12)$$

ขั้นตอนที่ 1.6 นำค่าสัมประสิทธิ์หน้า x_2 ของสมการสามคือ a'_{32} คูณสมการ (2-12)

$$a'_{32} x_2 + a'_{23} \frac{a'_{32}}{a'_{22}} x_3 = \frac{a'_{32}}{a'_{22}} b'_2 \quad (2-13)$$

ขั้นตอนที่ 1.7 นำสมการ (2-13) ไปลบออกจากสมการที่สามของสมการ (2-11)

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 &= b_1 \\ a'_{22} x_2 + a'_{23} x_3 &= b'_2 \\ a''_{33} x_3 &= b''_3 \end{aligned} \quad (2-14)$$

$$\text{โดย } a''_{33} = \left(a'_{33} - a'_{23} \frac{a'_{32}}{a'_{22}} \right), b''_3 = \left(b'_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} b'_2 \right)$$

ขั้นตอนที่ 2 การแทนค่าย้อนกลับ

ขั้นตอนที่ 2.1 นำสมการ (2-14) แถวที่สามหาค่า x_3

$$x_3 = \frac{b''_3}{a''_{33}} \quad (2-15)$$

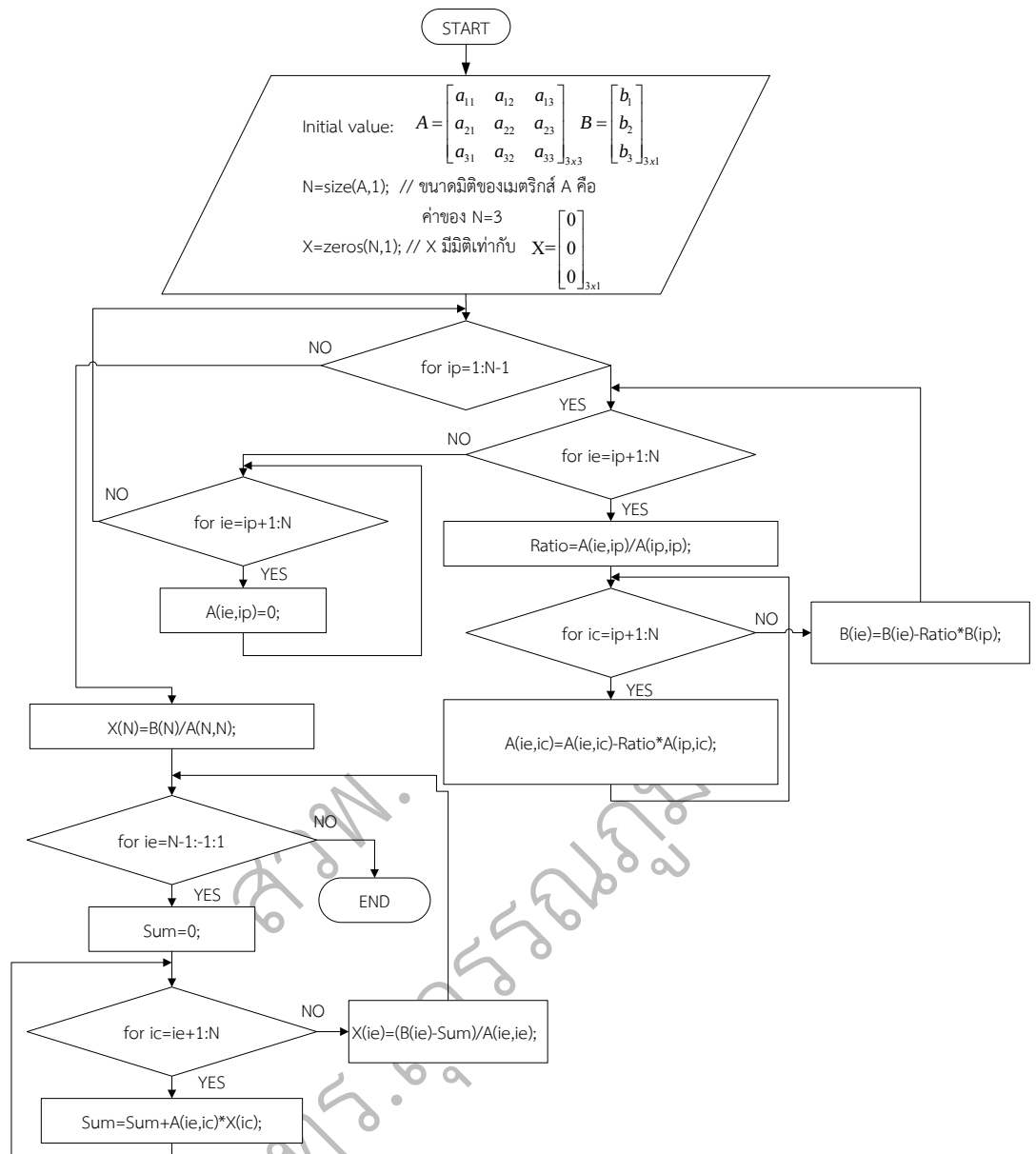
ขั้นตอนที่ 2.2 นำสมการ (2-14) แถวที่สองหาค่า x_2

$$x_2 = \frac{b'_2 - a'_{23} x_3}{a'_{22}} \quad (2-16)$$

ขั้นตอนที่ 2.2 นำสมการ (2-14) แถวที่หนึ่งหาค่า x_1

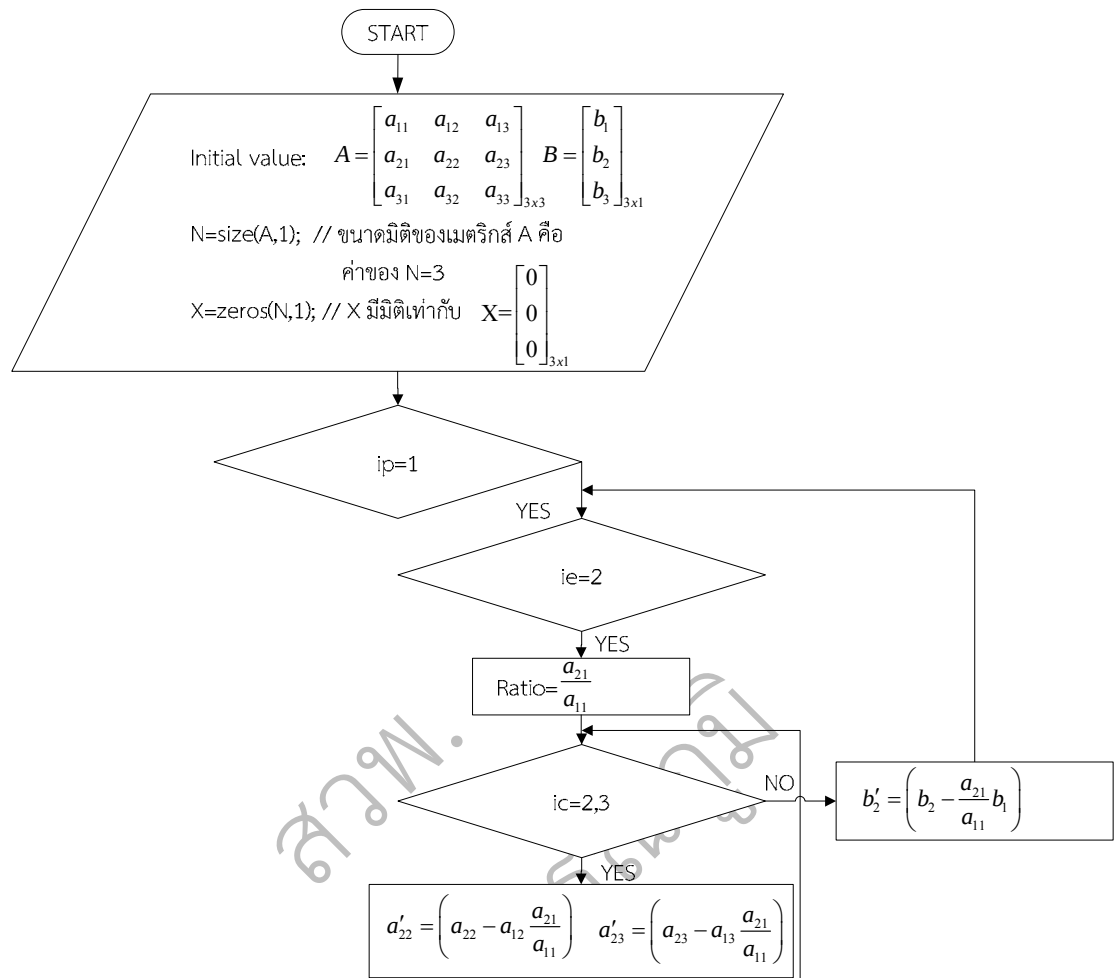
$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3}{a_{11}} \quad (2-17)$$

จากขั้นตอนของระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์สามารถนำมาเขียนเป็นผังงานได้ดังรูป 2.11

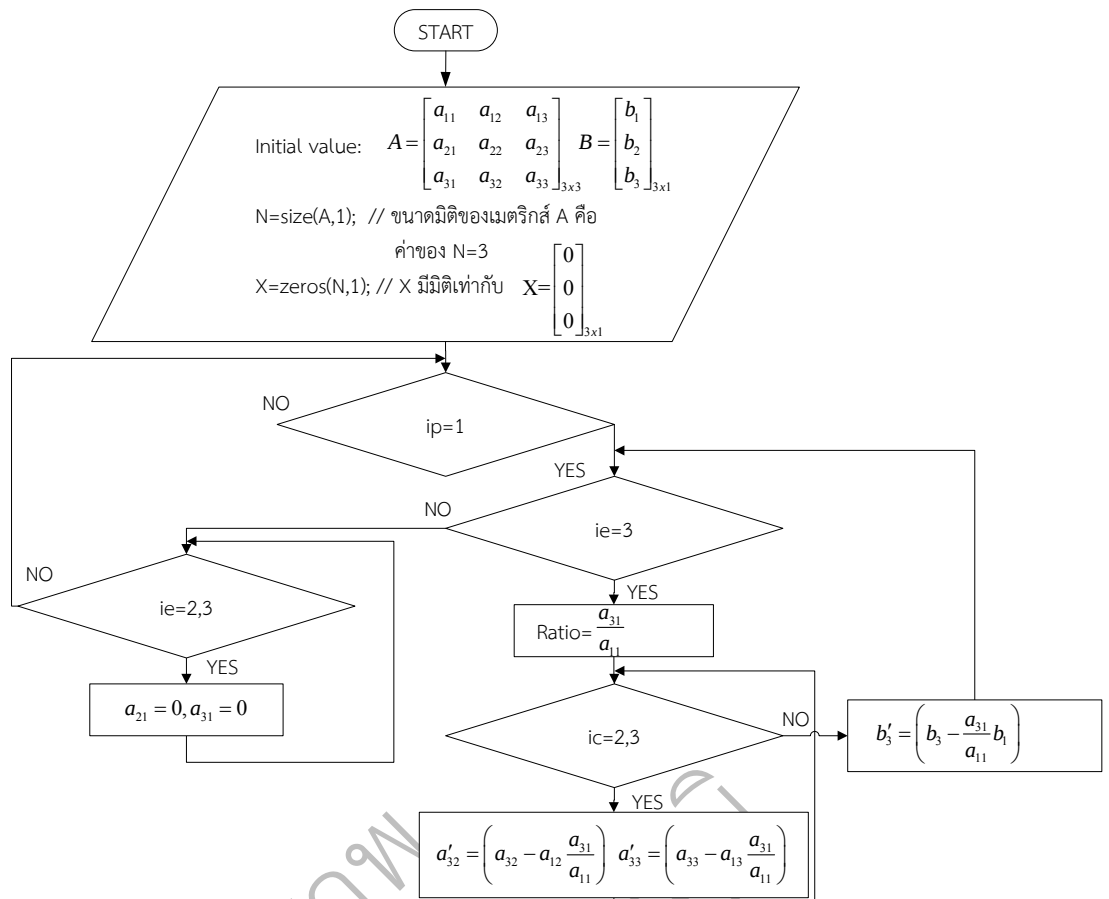


รูป 2.11 ผังงานระเบียบวิธีในการทำจัดแบบเกาส์

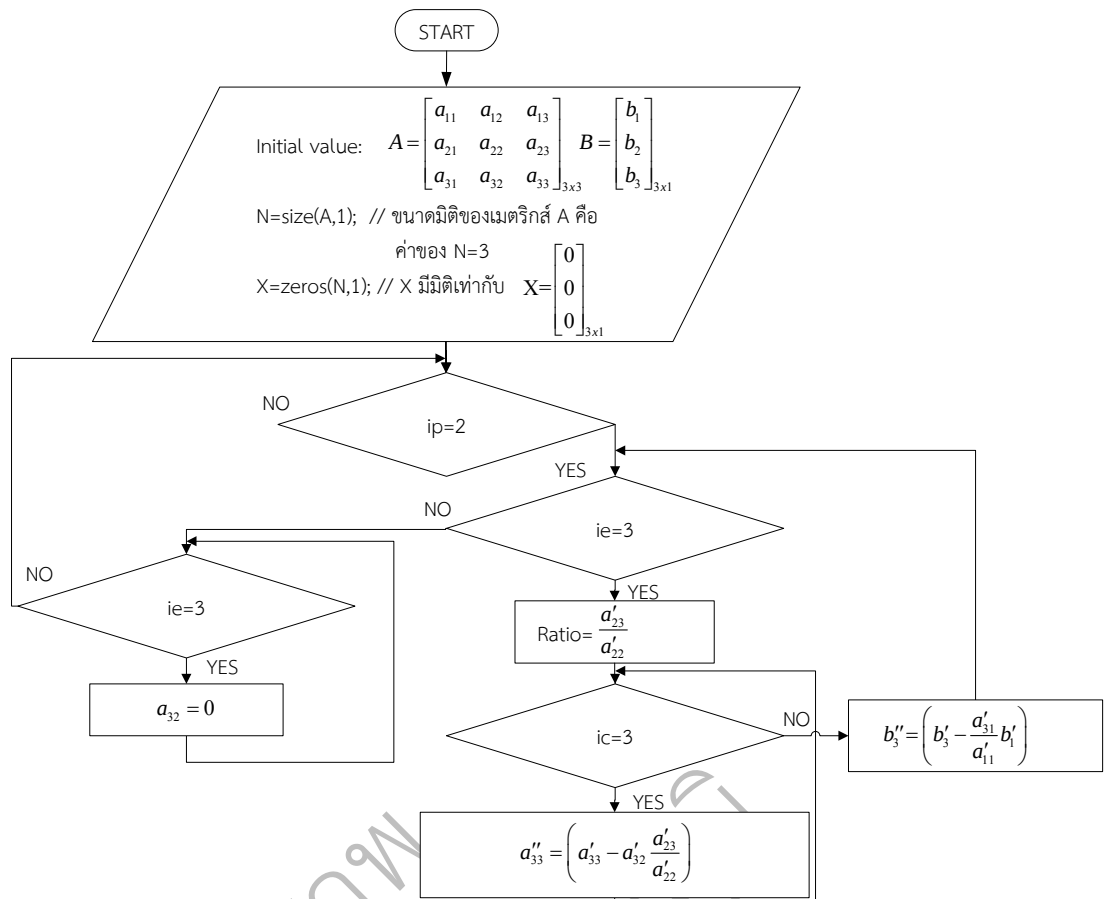
เพื่อวัตถุประสงค์ในการทำความเข้าใจจึงขออธิบายเพิ่มเติมในส่วนของการกำจัดไปข้างหน้า ในขั้นตอนที่ 1 ดังรูป 2.12, 2.13, 2.14 และสำหรับ การแทนค่าย้อนกลับ ในขั้นตอนที่ 2 ดังรูป 2.15, 2.16



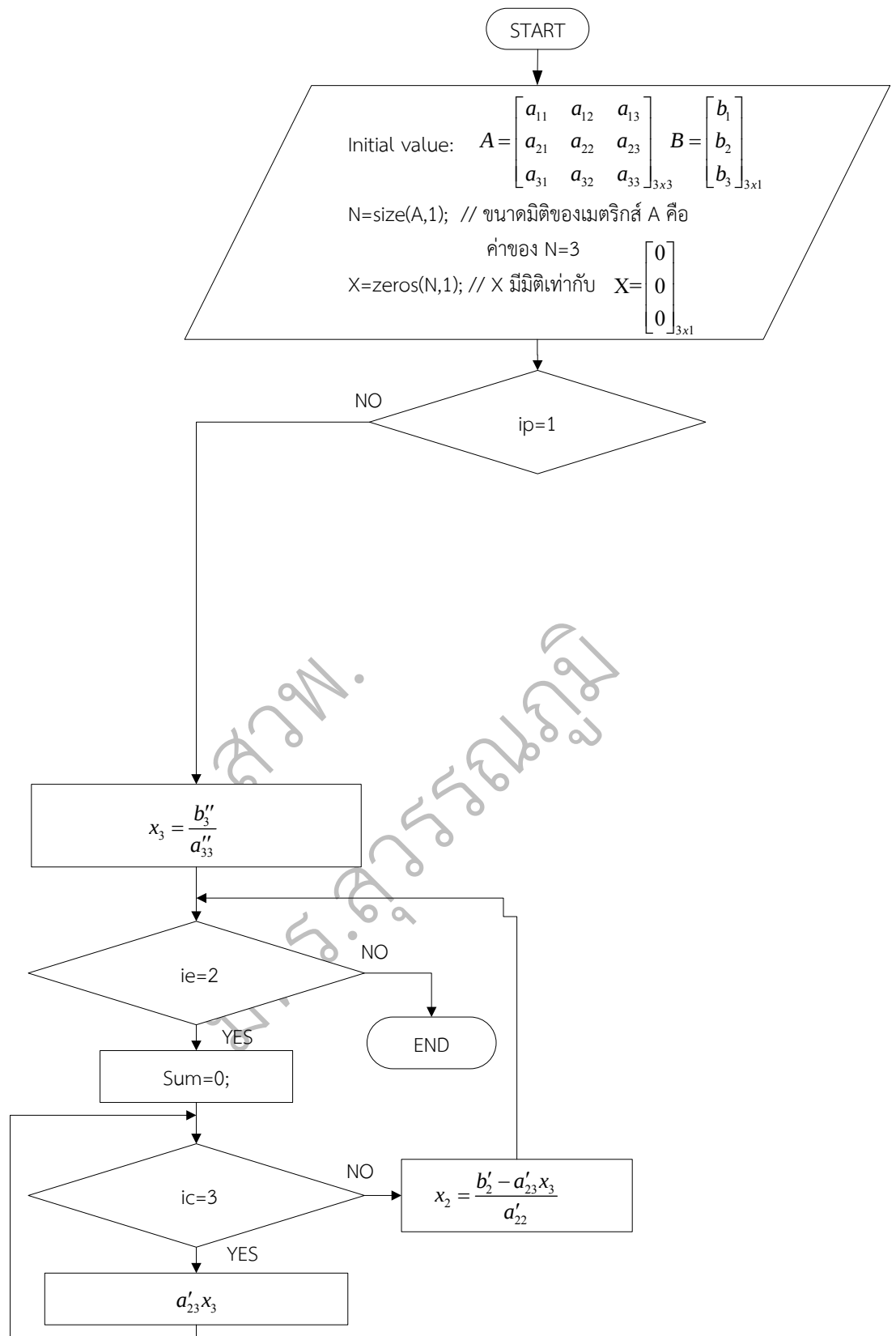
รูป 2.12 การกำจัดไปข้างหน้าเมื่อ $ip = 1, ie = 2$ และ $ic = 2, 3$



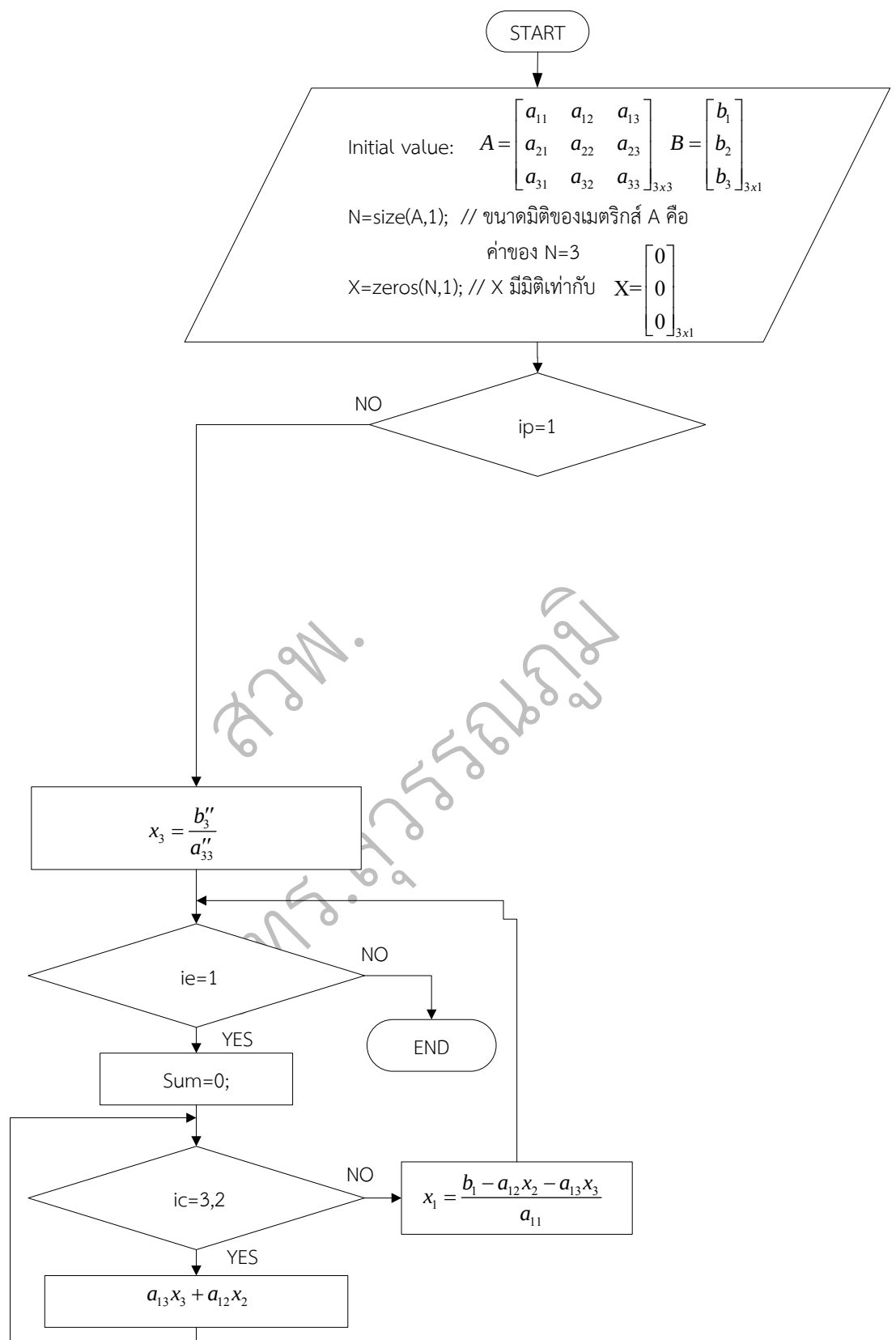
รูป 2.13 การกำจัดไปข้างหน้าเมื่อ $ip = 1, ie = 3$ และ $ic = 2,3$



รูป 2.14 การกำจัดไปข้างหน้าเมื่อ $ip = 2, ie = 3$ และ $ic = 3$



รูป 2.15 การแทนค่าย้อนกลับเมื่อ $ip = 1, ie = 2$ และ $ic = 3$



รูป 2.16 การแทนค่าย้อนกลับเมื่อ $ip = 1, ie = 1$ และ $ic = 3, 2$

2.2.2.2 ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์แบบปรับปรุงด้วยการเลือกตัวหลักและการจัดสเกล

ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์มีปัญหาสองข้อคือ ความผิดพลาดจากการปัดเศษ และระบบสมการในภาวะไม่เหมาะสม [3] ซึ่งสามารถแก้ไขได้ด้วยวิธี การเลือกตัวหลัก (pivoting) และ การจัดสเกล (scaling)

2.2.2.2.1 การเลือกตัวหลัก (pivoting) (โดยการจัดเรียงสมการ) มีขั้นตอนดังนี้

เมื่อกำหนดให้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

ขั้นตอนที่ 1 เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของแถวที่หนึ่งกับแถวที่เหลือทั้งหมดในคอลัมน์แรกคือ

a_{11}, a_{21}, a_{31} ว่าสัมประสิทธิ์ของแถวใดมีค่าสูงสุด

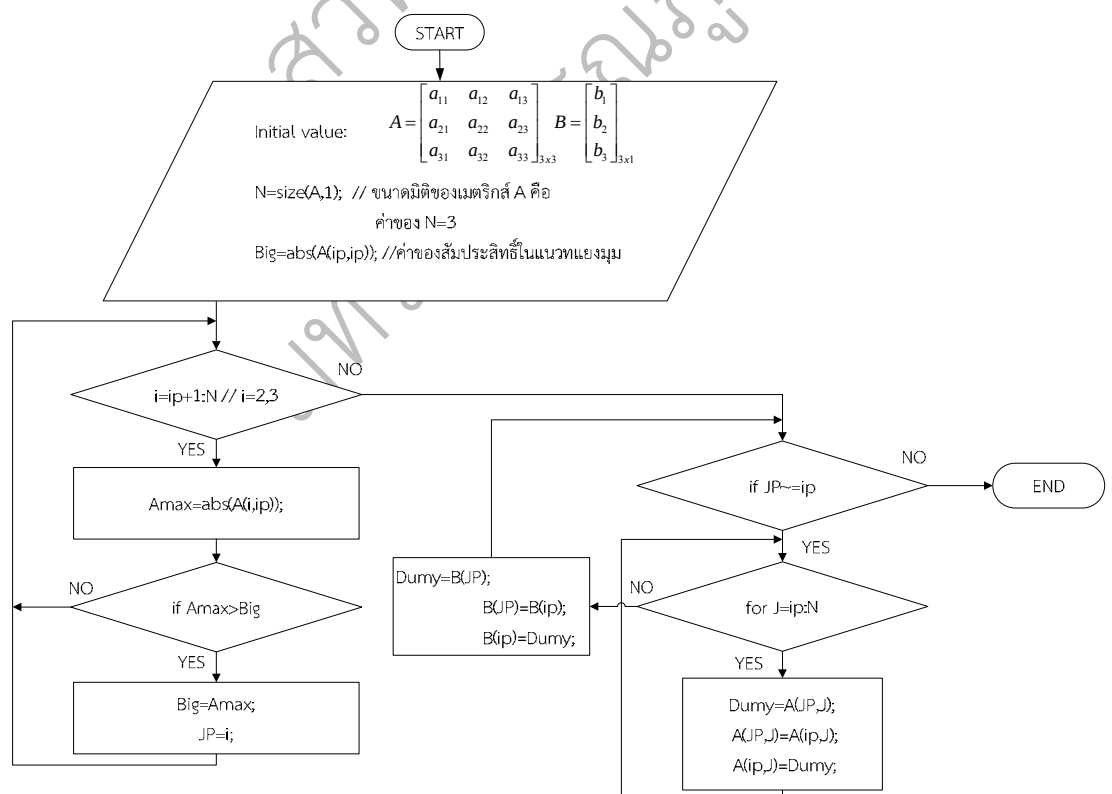
ขั้นตอนที่ 2 สลับแถวที่มีสัมประสิทธิ์ในคอลัมน์แรกสูงสุดกับแถวแรก

ขั้นตอนที่ 3 เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของแถวที่สองกับแถวที่สามในคอลัมน์ที่สองคือ

a_{22}, a_{32} ว่าสัมประสิทธิ์ของแถวใดมีค่าสูงสุด

ขั้นตอนที่ 4 สลับแถวที่มีสัมประสิทธิ์ในคอลัมน์ที่สองสูงสุดกับแถวที่สอง

การเลือกตัวหลัก สามารถนำมาเขียนเป็นผังงานได้ดังรูป 2.17



รูป 2.17 การเลือกตัวหลัก

2.2.2.2.2 การจัดสเกล (scaling) มีขั้นตอนดังนี้ เมื่อกำหนดให้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

ขั้นตอนที่ 1 เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของแถวที่หนึ่งในแต่ละคอลัมส์คือ a_{11}, a_{12}, a_{13} ว่าสัมประสิทธิ์ของคอลัมส์ใดมีค่าสูงสุด

ขั้นตอนที่ 2 นำสัมประสิทธิ์ของคอลัมส์ที่มีค่าสูงสุดหารสัมประสิทธิ์ของแถวที่หนึ่งทุกตัว

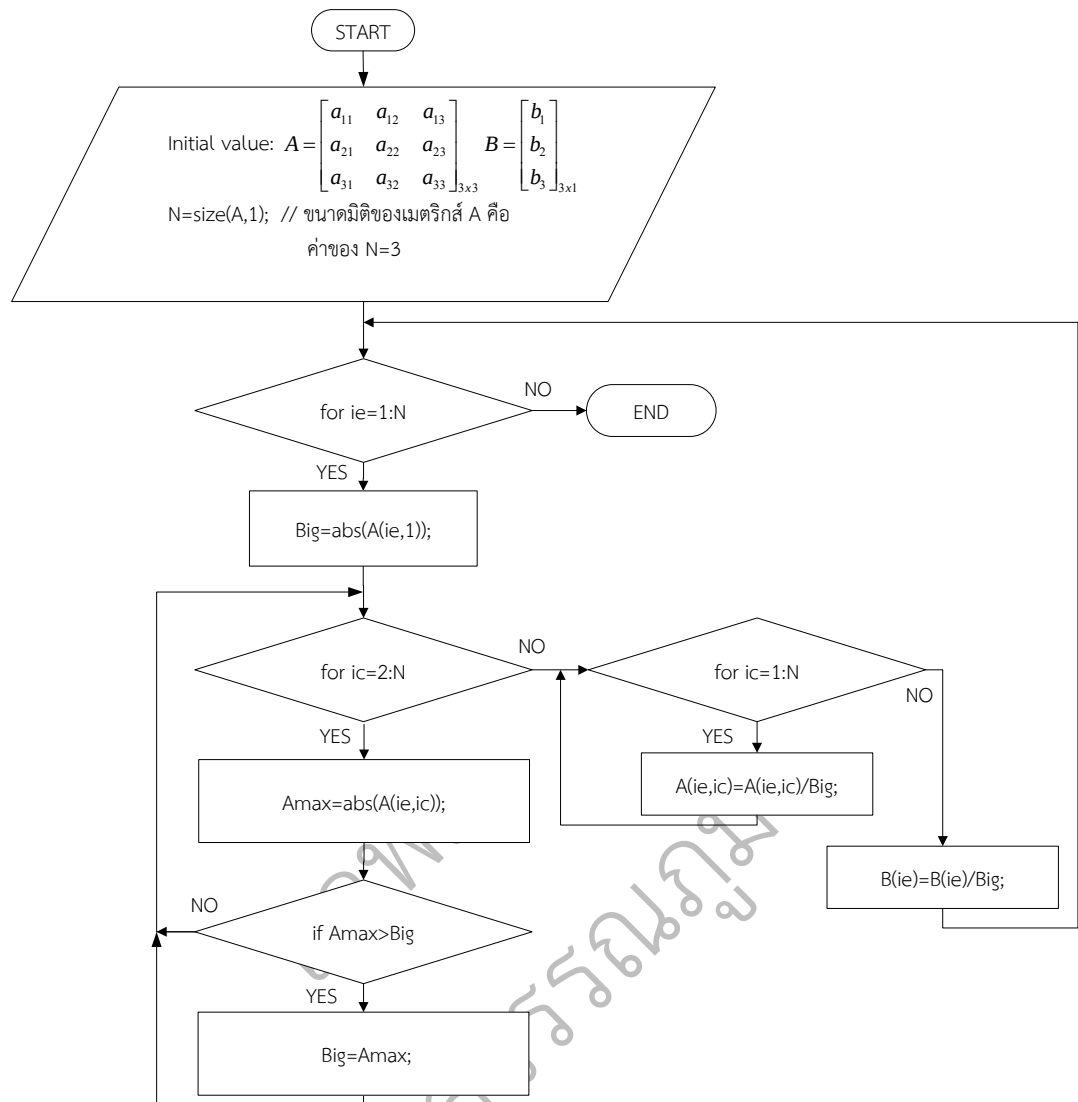
ขั้นตอนที่ 3 เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของแถวที่สองในแต่ละคอลัมส์คือ a_{21}, a_{22}, a_{23} ว่าสัมประสิทธิ์ของคอลัมส์ใดมีค่าสูงสุด

ขั้นตอนที่ 4 นำสัมประสิทธิ์ของคอลัมส์ที่มีค่าสูงสุดหารสัมประสิทธิ์ของแถวที่สองทุกตัว

ขั้นตอนที่ 5 เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของแถวที่สามในแต่ละคอลัมส์คือ a_{31}, a_{32}, a_{33} ว่าสัมประสิทธิ์ของคอลัมส์ใดมีค่าสูงสุด

ขั้นตอนที่ 6 นำสัมประสิทธิ์ของคอลัมส์ที่มีค่าสูงสุดหารสัมประสิทธิ์ของแถวที่สามทุกตัว

การจัดสเกล สามารถนำมาเขียนเป็นผังงานได้ดังรูป 2.18



รูป 2.18 การจัดสเกล

2.2.2.3 ระเบียบวิธีของเกาส์-จอร์ดอง

ระเบียบวิธีของเกาส์-จอร์ดอง เป็นการจัดสมการให้อยู่ในรูปแบบดังรูป 2.19 ซึ่งเป็นการทำต่อจากการกำจัดไปข้างหน้าของเกาส์ และสามารถหาคำตอบได้ทันที

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a''_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a'''_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b''_2 \\ b'''_3 \end{bmatrix}$$

รูป 2.19 ระเบียบวิธีของเกาส์-จอร์ดอง

ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์-จอร์ดองมีขั้นตอนดังนี้ (สมมติให้มีสามสมการดังรูป 2.19)

ขั้นตอนที่ 1 การกำจัดไปข้างหน้าแบบเกาส์ (โปรดดูสมการ (2-8) ถึงสมการ (2-14)) คือ

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2$$

$$a''_{33}x_3 = b''_3$$

ขั้นตอนที่ 2 ทำต่อจากการกำจัดไปข้างหน้าแบบเกาส์

ขั้นตอนที่ 2.1 ทำให้สัมประสิทธิ์ในแนวเส้นทแยงมุมเป็นหนึ่ง

$$\frac{a_{11}}{a_{11}}x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$0 \quad \frac{a'_{22}}{a'_{22}}x_2 + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}x_3 = \frac{b'_2}{a'_{22}}$$

$$0 \quad 0 \quad \frac{a''_{33}}{a''_{33}}x_3 = \frac{b''_3}{a''_{33}}$$

หรือ

$$1x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 = d_1$$

$$1x_2 + c_{23}x_3 = d_2$$

$$1x_3 = d_3$$

(2-18)

$$\text{โดย } c_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}}, c_{13} = \frac{a_{13}}{a_{11}}, d_1 = \frac{b_1}{a_{11}}, c_{23} = \frac{a'_{23}}{a'_{22}}, d_2 = \frac{b'_2}{a'_{22}} \text{ และ } d_3 = \frac{b''_3}{a''_{33}}$$

ขั้นตอนที่ 2.2 (ทำให้สัมประสิทธิ์เหนือแนวเส้นทแยงมุมเป็นศูนย์) นำ $-c_{12}$ คูณสมการที่สองของสมการ (2-18) และนำไปบวกกับสมการที่หนึ่ง

$$1x_1 + (c_{12} - c_{12})x_2 + (c_{13} - c_{12}c_{23})x_3 = (d_1 - c_{12}d_2)$$

$$1x_2 + c_{23}x_3 = d_2$$

$$1x_3 = d_3$$

จะได้

$$1x_1 + 0 + c'_{13}x_3 = d'_1$$

$$0 \quad 1x_2 + c_{23}x_3 = d_2$$

$$0 \quad 0 \quad 1x_3 = d_3$$

$$\text{โดย } c'_{13} = (c_{13} - c_{12}c_{23}) \text{ และ } d'_1 = (d_1 - c_{12}d_2)$$

ขั้นตอนที่ 2.3 (ทำให้สัมประสิทธิ์เหนือแนวเส้นทแยงมุมเป็นศูนย์) นำ $-c'_{13}$ คูณสมการที่สามและนำไปบวกกับสมการที่หนึ่ง

$$1x_1 + 0 + (c'_{13} - c'_{13})x_3 = (d'_1 - (c'_{13} * d_3))$$

$$0 \quad 1x_2 + c_{23}x_3 = d_2$$

$$0 \quad 0 \quad 1x_3 = d_3$$

จะได้

$$\begin{array}{ccc} 1x_1 & 0 & 0 = (d'_1 - (c'_{13} * d_3)) \\ 0 & 1x_2 + c_{23}x_3 & = d_2 \\ 0 & 0 & 1x_3 = d_3 \end{array}$$

โดย $d_1'' = (d'_1 - (c'_{13} * d_3))$

ขั้นตอนที่ 2.4 (ทำให้สัมประสิทธิ์เหนือแนวเส้นทแยงมุมเป็นศูนย์) นำ $-c_{23}$ คูณสมการที่สาม และนำไปบวกกับสมการที่สอง

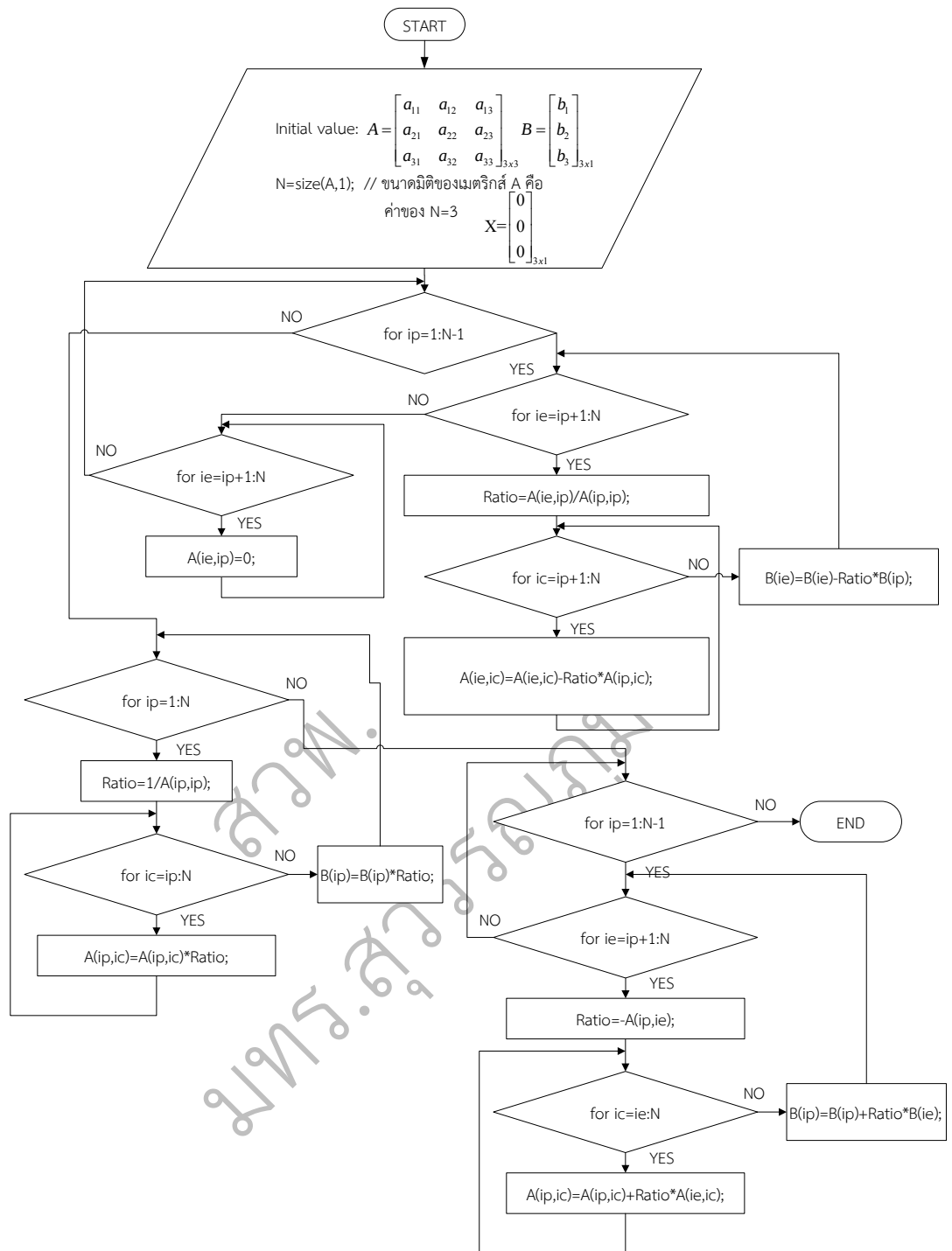
$$\begin{array}{ccc} 1x_1 & 0 & 0 = d_1'' \\ 0 & 1x_2 + (c_{23} - c_{23})x_3 & = (d_2 - c_{23} * d_3) \\ 0 & 0 & 1x_3 = d_3 \end{array}$$

จะได้

$$\begin{array}{ccc} 1x_1 & 0 & 0 = d_1'' \\ 0 & 1x_2 & 0 = d_2' \\ 0 & 0 & 1x_3 = d_3 \end{array}$$

โดย $d_2' = (d_2 - c_{23} * d_3)$

ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์-จอร์ดอง สามารถนำมาเขียนเป็นผังงานได้ดังรูป 2.20



รูป 2.20 ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์-ชอร์ดอง

2.2.2.4 ระเบียบวิธีการทำเมทริกซ์ผกผัน

ระเบียบวิธีการทำเมทริกซ์ผกผัน เป็นการจัดการสมการให้อยู่ในรูปแบบดังรูป 2.21 ซึ่ง
เป็นประยุกต์ใช้จากระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์-จอร์ดอง

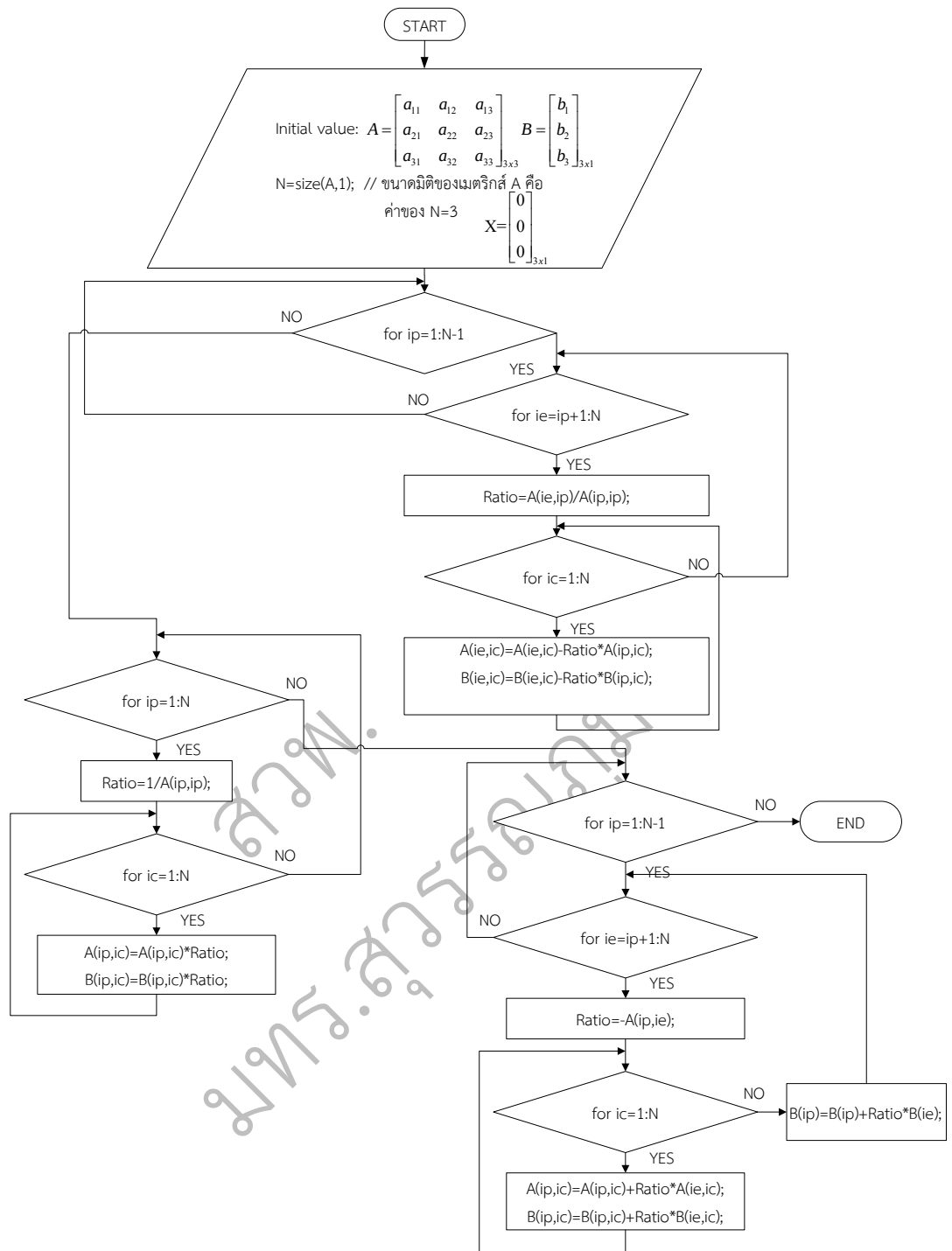
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} [A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [A]^{-1} = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{bmatrix}$$

รูป 2.21 ระเบียบวิธีการทำเมทริกซ์ผกผัน

ระเบียบวิธีการทำเมทริกซ์ผกผันมีขั้นตอนคล้ายกับระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์-จอร์ดอง เพียงแต่
เมตริกซ์ B จะเป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์

ระเบียบวิธีการทำเมทริกซ์ผกผัน สามารถนำมาเขียนเป็นผังงานได้ดังรูป 2.22

สวพ.
มทร.สุวรรณภูมิ



รูป 2.22 ระเบียบวิธีการทำเมทริกซ์ผกผัน

2.2.2.5 ระเบียบวิธีการแยกแบบแอลยู

ระเบียบวิธีการแยกแบบแอลยู เป็นการจัดสมการให้อยู่ในรูปแบบดังรูป 2.23 ซึ่งสามารถหาคำตอบได้ในสองขั้นตอนคือการแทนค่าแบบไปข้างหน้าและการแทนค่าย้อนกลับดังสมการ (2-19) และ (2-20)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

รูป 2.23 ระเบียบวิธีการแยกแบบแอลยู

การแทนค่าแบบไปข้างหน้า

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (2-19)$$

การแทนค่าย้อนกลับ

$$\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (2-20)$$

สำหรับการหา เมทริกซ์ [L] [U] หาได้จากการเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์จากสมการในรูป 2.23

$$l_{11} = a_{11}$$

$$l_{21} = a_{21}$$

$$l_{31} = a_{31}$$

$$u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}}$$

$$u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}}$$

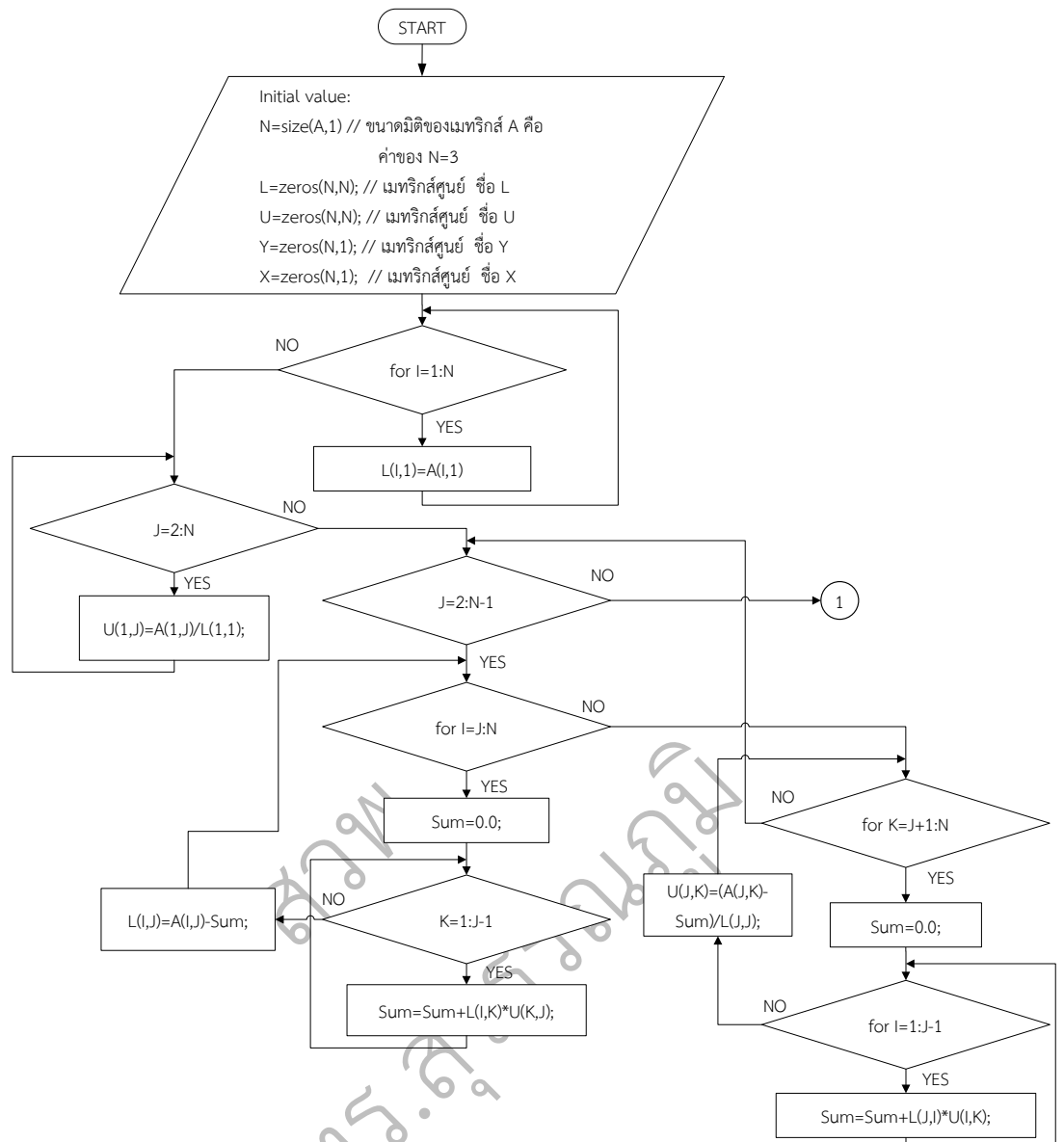
$$l_{22} = a_{22} - \frac{l_{21}u_{12}}{u_{12}}$$

$$l_{32} = a_{32} - l_{31}u_{12}$$

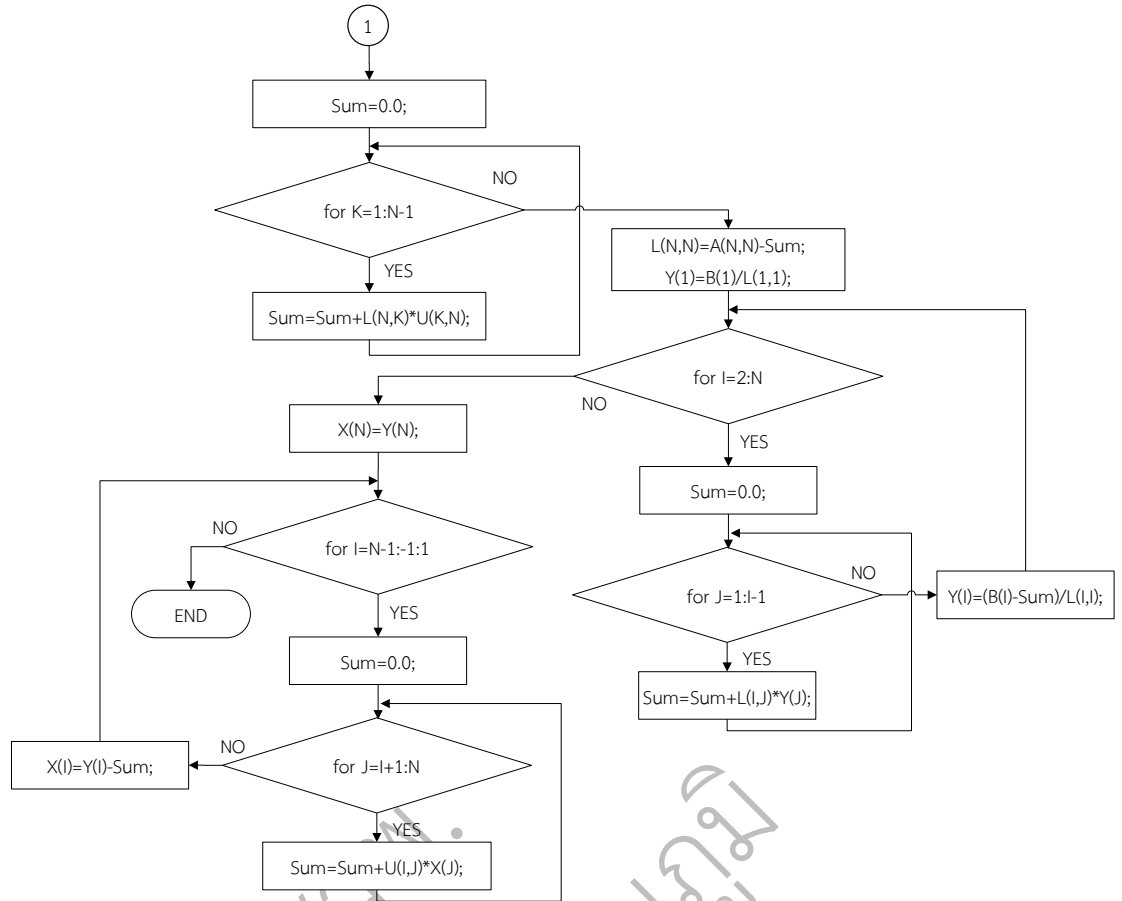
$$u_{23} = \frac{a_{23} - l_{21}u_{13}}{l_{22}}$$

$$l_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23}$$

ระเบียบวิธีการแยกแบบแอลยู สามารถนำมาเขียนเป็นผังงานได้ดังรูป 2.24



รูป 2.24 ระเบียบวิธีการแยกแบบแอลยู



รูป 2.24 ระเบียบวิธีการแยกแบบแอลยู (ต่อ)

2.2.2.6 ระเบียบวิธีการแยกแบบโคเลซกี

ระเบียบวิธีการแยกแบบโคเลซกี เป็นการ จัดสมการให้อยู่ในรูปแบบดังรูป 2.25 เมื่อเมทริกซ์ A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นระบบ (Systematic matrix) หรือ $[A] = [L][L]^T$ สามารถหาคำตอบได้ในสองขั้นตอนคือการแทนค่าแบบไปข้างหน้าและการแทนค่าย้อนกลับดังสมการ (2-21) และ (2-22)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

หรือ

$$[A] = [L][L]^T$$

รูป 2.25 ระเบียบวิธีการแยกแบบโคเลซกี

การแทนค่าแบบไปข้างหน้า

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (2-21)$$

การแทนค่าย้อนกลับ

$$\begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (2-22)$$

สำหรับการหา เมทริกซ์ $[L][L]^T$ หาได้จากการเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์จากสมการในรูป 2.25

$$l_{11}^2 = a_{11}$$

$$l_{11}l_{21} = a_{12}$$

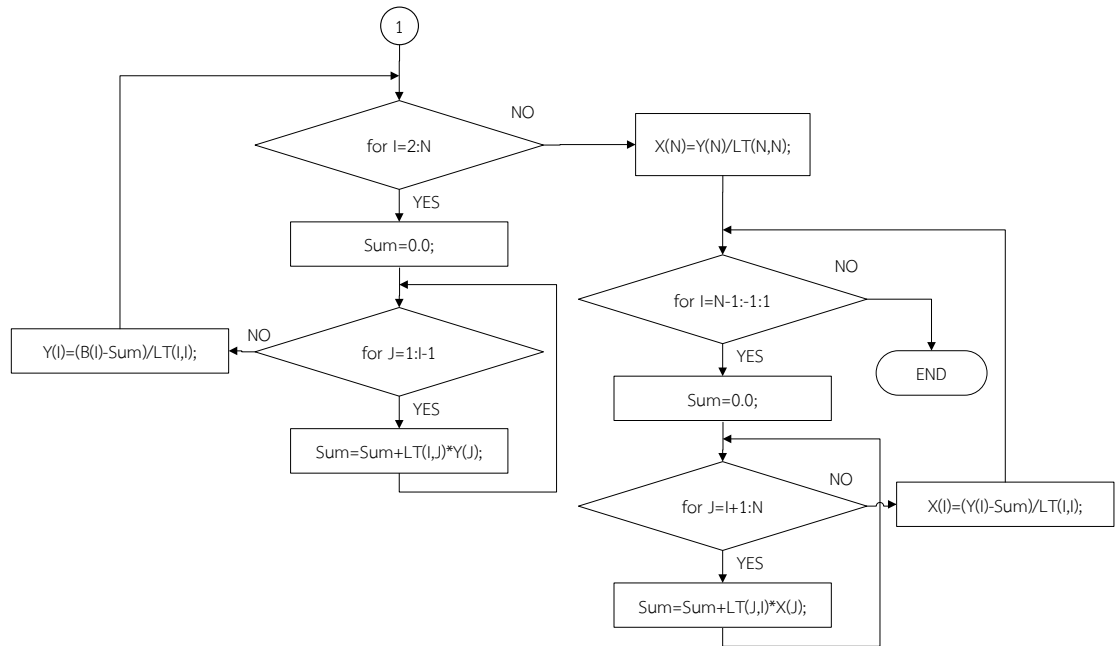
$$l_{11}l_{31} = a_{13}$$

$$l_{21}^2 + l_{22}^2 = a_{22}$$

$$l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} = a_{23}$$

$$l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = a_{33}$$

ระเบียบวิธีการแยกแบบโคเลซกี สามารถนำมาเขียนเป็นผังงานได้ดังรูป 2.26



รูป 2.26 ระเบียบวิธีการแยกแบบโซ่เลขกิ (ต่อ)

2.2.2.7 ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบยาโคบี

ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบยาโคบี เป็นการจัดสมการให้อยู่ในรูปแบบดังรูป 2.27

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \\ \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}} \\ \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}} \end{bmatrix}$$

รูป 2.27 ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบยาโคบี

ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบยาโคบีมีขั้นตอนคล้ายกับระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบหนึ่งจุดซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 กำหนดค่าตอนเริ่มต้นของ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_i$ และค่าเกณฑ์ที่ยอมรับ (ε)

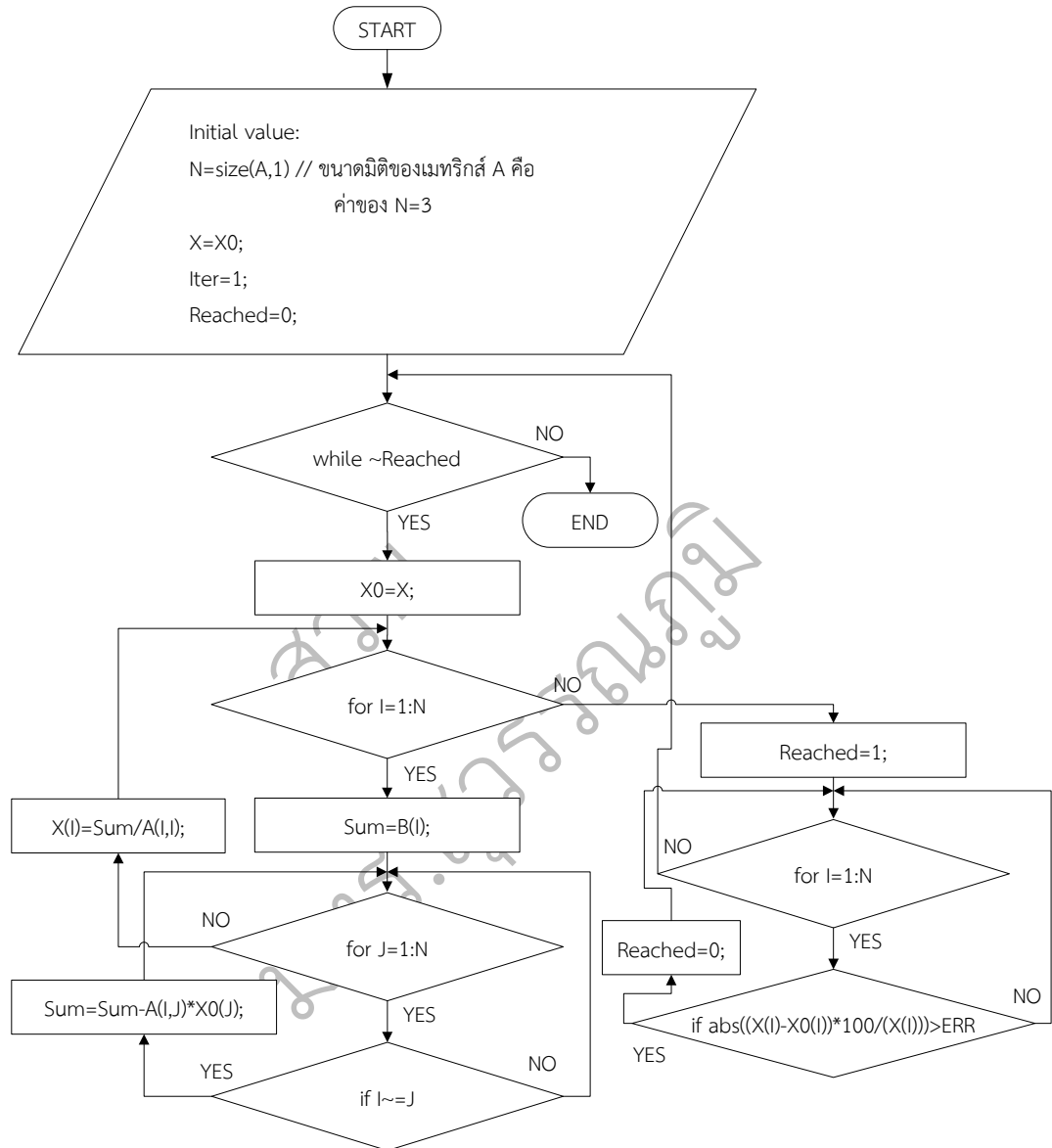
ขั้นตอนที่ 2 คำนวณค่าตัวแปรในรอบถัดไป ในรูปแบบ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \\ \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}} \\ \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}} \end{bmatrix}_i$$

ขั้นตอนที่ 3 ตรวจสอบค่าผลต่างของรอบการคำนวณปัจจุบันและรอบการคำนวณก่อนหน้า $(x_{i+1} - x_i)$ ที่ได้ว่าต่ำกว่าเกณฑ์ที่ยอมรับ (ε) หรือยัง ถ้ายังก็กลับไปทำในขั้นตอนที่ 1 ต่อ

$$|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$$

จากขั้นตอนของระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบยาโคบีจึงสามารถนำมาเขียนเป็นผังงานได้ดังรูป 2.28



รูป 2.28 ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบยาโคบี

2.2.2.8 ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดล

ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดล มีการจัดสมการให้อยู่ในรูปแบบคล้ายกันกับ ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบยาโคบี เพียงแต่ตอนหาตัวแปรจะนำเอาตัวแปรที่หามาได้ในรอบปัจจุบันใช้ ด้วยเลย ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดลมีขั้นตอนคล้ายกับระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบหนึ่งจุดซึ่ง มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 กำหนดค่าตอนเริ่มต้นของ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_i$ และค่าเกณฑ์ที่ยอมรับ (ε)

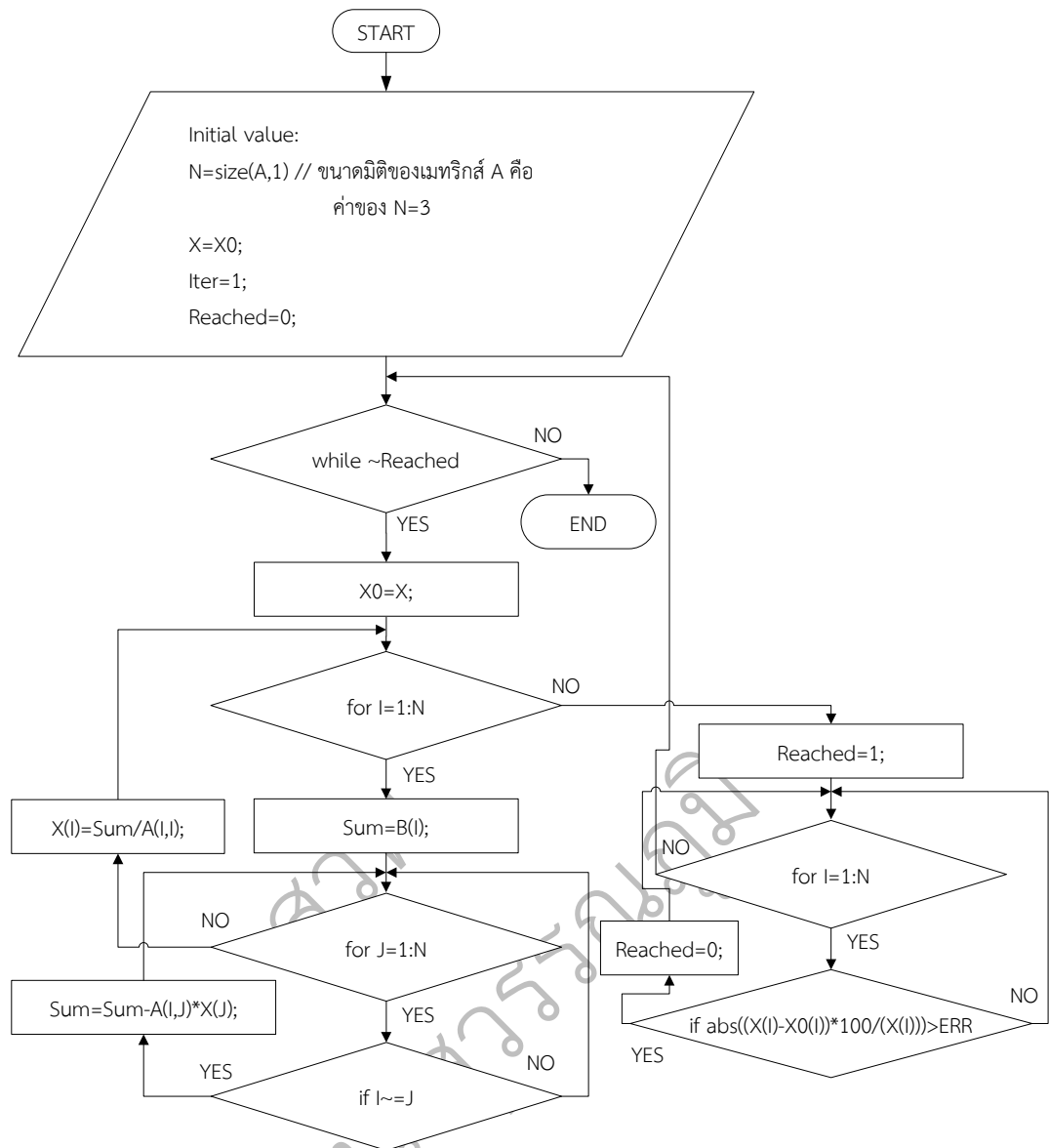
ขั้นตอนที่ 2 คำนวณค่าตัวแปรในรอบถัดไป ในรูปแบบ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \\ \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}} \\ \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}} \end{bmatrix} \quad \text{โดย} \quad \begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k}{a_{11}} \\ \frac{b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k}{a_{22}} \\ \frac{b_3 - a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1}}{a_{33}} \end{bmatrix}$$

ขั้นตอนที่ 3 ตรวจสอบค่าผลต่างของรอบการคำนวณปัจจุบันและรอบการคำนวณก่อนหน้า ($x_{i+1} - x_i$) ที่ได้ว่าต่ำกว่าเกณฑ์ที่ยอมรับ (ε) หรือยัง ถ้ายังก็กลับไปทำในขั้นตอนที่ 1 ต่อ

$$|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$$

จากขั้นตอนของระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดลจึงสามารถนำมาเขียนเป็นผังงานได้ดังรูป 2.29



รูป 2.29 ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดล

2.2.2.9 ระเบียบวิธีการผ่อนปรนเกินสิบเนื่อง

ระเบียบวิธีการผ่อนปรนเกินสิบเนื่อง มีการจัดสมการให้อยู่ในรูปแบบคล้ายกับ ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดล เพียงแต่ตอนปรับปรุงตัวแปรจะนำเอาตัวคูณมาช่วย เพื่อให้น้ำหนักของรอบการคำนวณก่อนหน้าหรือในรอบปัจจุบันมากกว่ากันดังสมการ (2-23)

$$x_i^{k+1} = \lambda x_i^{k+1*} + (1-\lambda)x_i^k \quad (2-23)$$

เมื่อ x_i^{k+1*} คือการคำนวณด้วยระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดล

ระเบียบวิธีการผ่อนปรนเกินสืบเนื่องมีขั้นตอนคล้ายกับระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดลซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 กำหนดค่าตอนเริ่มต้นของ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_i$ และค่าเกณฑ์ที่ยอมรับ (ε)

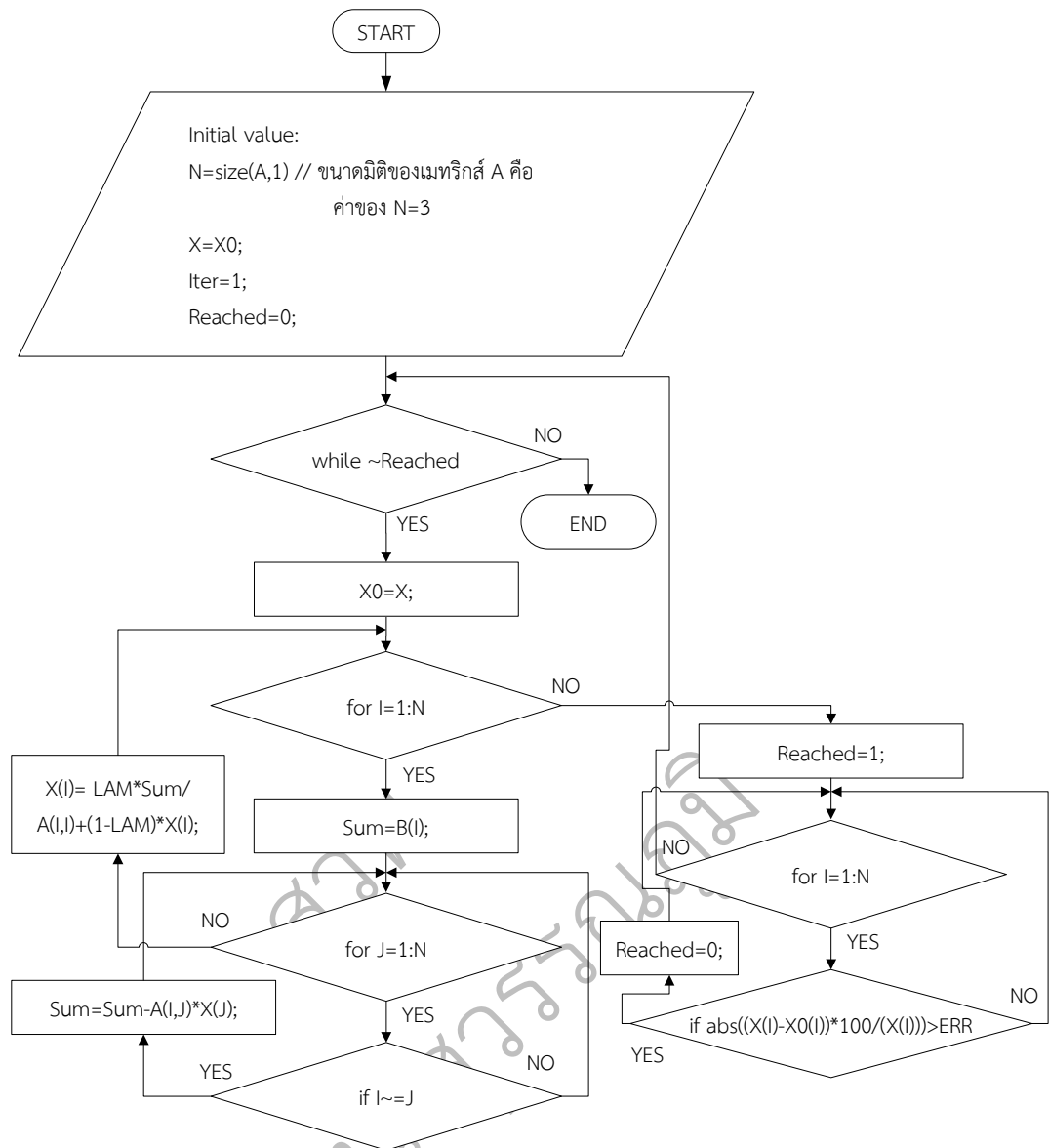
ขั้นตอนที่ 2 คำนวณค่าตัวแปรในรอบถัดไป ในรูปแบบ

$$\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k}{a_{11}} \\ \frac{b_2 - a_{21}(\lambda x_1^{k+1*} + (1-\lambda)x_1^k) - a_{23}x_3^k}{a_{22}} \\ \frac{b_3 - a_{31}(\lambda x_1^{k+1*} + (1-\lambda)x_1^k) - a_{32}(\lambda x_2^{k+1*} + (1-\lambda)x_2^k)}{a_{33}} \end{bmatrix}$$

ขั้นตอนที่ 3 ตรวจสอบค่าผลต่างของรอบการคำนวณปัจจุบันและรอบการคำนวณก่อนหน้า ($x_{i+1} - x_i$) ที่ได้ว่าต่ำกว่าเกณฑ์ที่ยอมรับ (ε) หรือยัง ถ้ายังก็กลับไปทำในขั้นตอนที่ 1 ต่อ

$$|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$$

จากขั้นตอนของระเบียบวิธีการผ่อนปรนเกินสืบเนื่องจึงสามารถนำมาเขียนเป็นผังงานได้ดังรูป 2.30



รูป 2.30 ระเบียบวิธีการผ่อนปรนเกินสปีนนิ่ง

2.2.3 การประมาณค่าในช่วง

2.2.3.1 ฟังก์ชันพหุนามของลากรานจ์

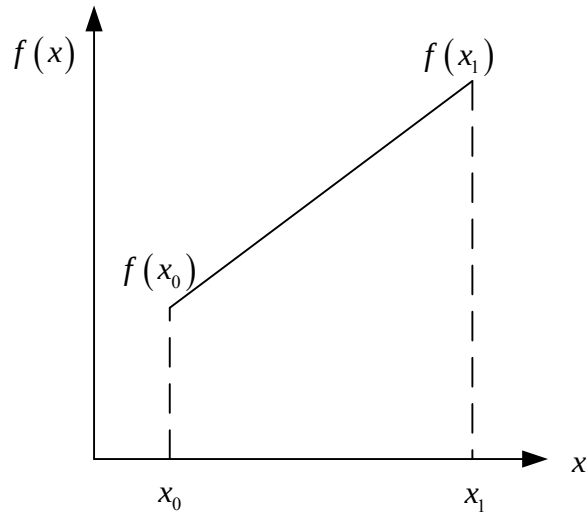
2.2.3.1.1 การประมาณค่าในช่วงเชิงเส้น

ถ้ามีเพียงสองข้อมูลดังรูป 2.31 การประมาณค่าระหว่างสองจุดด้วยสมการเส้นตรง

$f(x) = ax + b$ เมื่อ a และ b เป็นค่าคงที่ใดๆ จากการจัดสมการดัง [3] จะได้

$$f(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1)$$

$$\text{เมื่อ } L_0(x) = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \text{ และ } L_1(x) = \frac{x_0 - x}{x_0 - x_1}$$



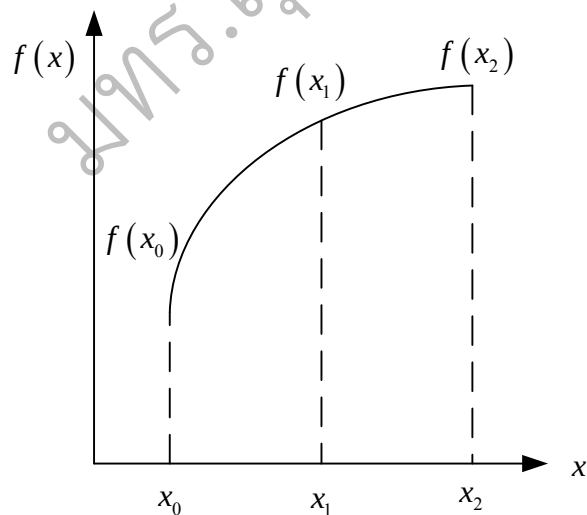
รูป 2.31 การประมาณค่าในช่วงระหว่างสองข้อมูล

2.2.3.1.2 การประมาณค่าในช่วงเชิงกำลังสอง

ถ้ามีสามข้อมูลดังรูป 2.32 การประมาณค่าระหว่างสามจุดด้วยสมการฟังก์ชันกำลังสอง $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a , b และ c เป็นค่าคงที่ใดๆ จากการจัดสมการดัง [3] จะได้

$$f(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$$

เมื่อ $L_0(x) = \frac{(x_2 - x)(x_1 - x)}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)}$, $L_1(x) = \frac{(x_2 - x)(x_0 - x)}{(x_2 - x_1)(x_0 - x_1)}$, $L_2(x) = \frac{(x_1 - x)(x_0 - x)}{(x_1 - x_2)(x_0 - x_2)}$



รูป 2.32 การประมาณค่าในช่วงระหว่างสามข้อมูล

2.2.3.1.3 การประมาณค่าในช่วงฟังก์ชันพหุนามโดยทั่วไป

ถ้ามีมากกว่าสามข้อมูล สามารถใช้การประมาณค่าด้วยสมการฟังก์ชันพหุนามได้ จาก [3] เขียนรูปแบบโดยทั่วไปได้

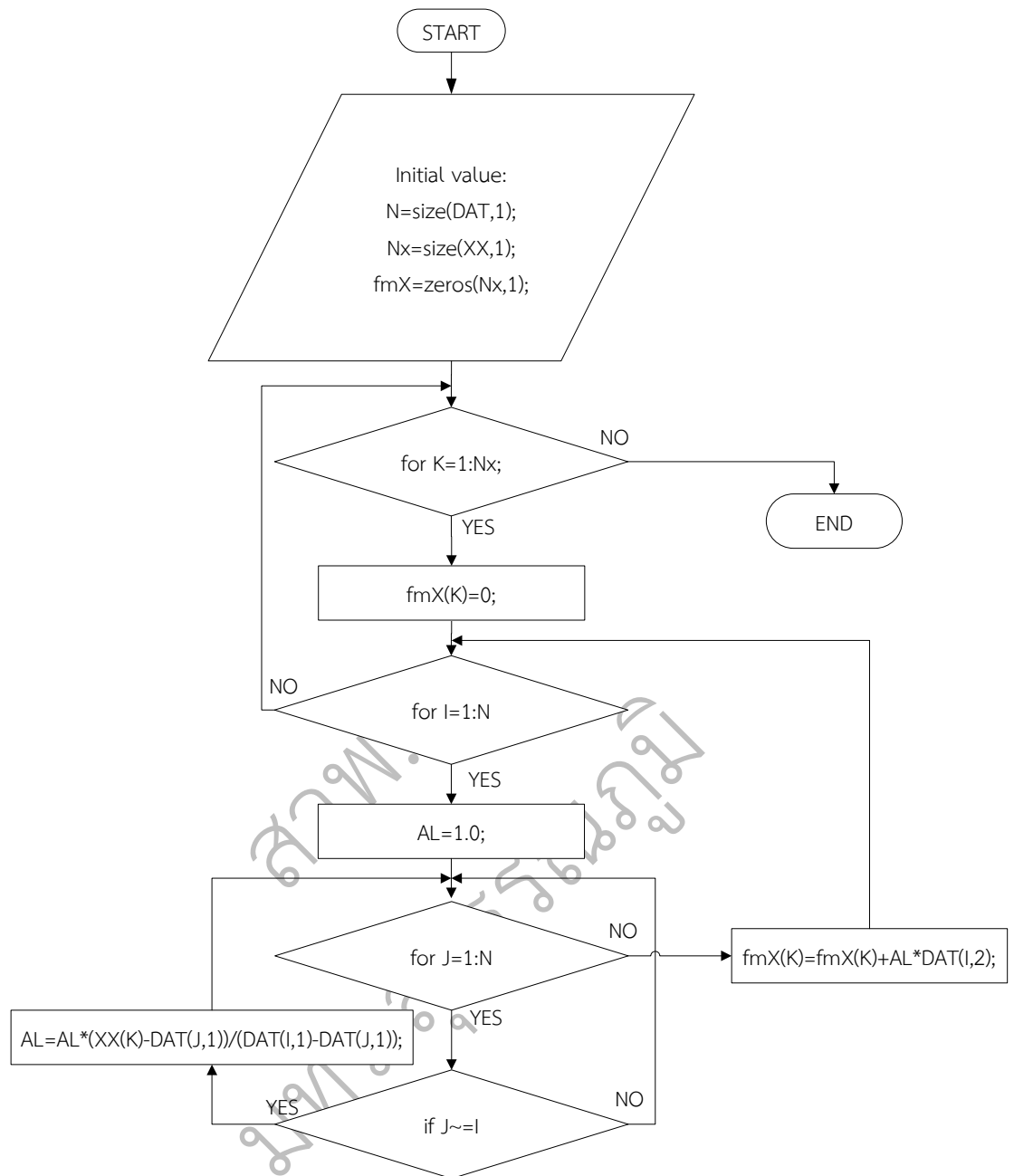
$$f(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i)$$

เมื่อ $L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$ และ n เท่ากับค่าอันดับสูงสุดของฟังก์ชันพหุนาม (จะต้องมีข้อมูล

$n+1$ ตัว)

การประมาณค่าในช่วงฟังก์ชันพหุนามโดยทั่วไปสามารถนำมาเขียนเป็นผังงานได้ดังรูป 2.33 ซึ่งนำไปใช้ได้กับการประมาณค่าในช่วงเชิงกำลังสองและการประมาณค่าในช่วงเชิงเส้นด้วย

สวพ.
มทร.สุวรรณภูมิ



รูป 2.33 ผังงานของการประมาณค่าในช่วงฟังก์ชันพหุนามโดยทั่วไปด้วยฟังก์ชันพหุนามของลากรานจ์

2.2.3.2 ผลต่างจากการแบ่งย่อยของนิวตัน

2.2.3.2.1 การประมาณค่าในช่วงเชิงเส้น

ถ้ามีเพียงสองข้อมูลดังรูป 2.31 การประมาณค่าระหว่างสองจุดด้วยสมการเส้นตรง $f(x) = ax + b$ เมื่อ a และ b เป็นค่าคงที่ใดๆ จากการจัดสมการดัง [3] จะได้

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

2.2.3.2.2 การประมาณค่าในช่วงเชิงกำลังสอง

ถ้ามีสามข้อมูลดังรูป 2.32 การประมาณค่าระหว่างสามจุดด้วยสมการฟังก์ชันกำลังสอง $f(x) = C_0(x) + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)(x - x_1)$ เมื่อ C_0, C_1, C_2 เป็นค่าคงที่ใดๆ จากการจัดสมการดัง [3] จะได้

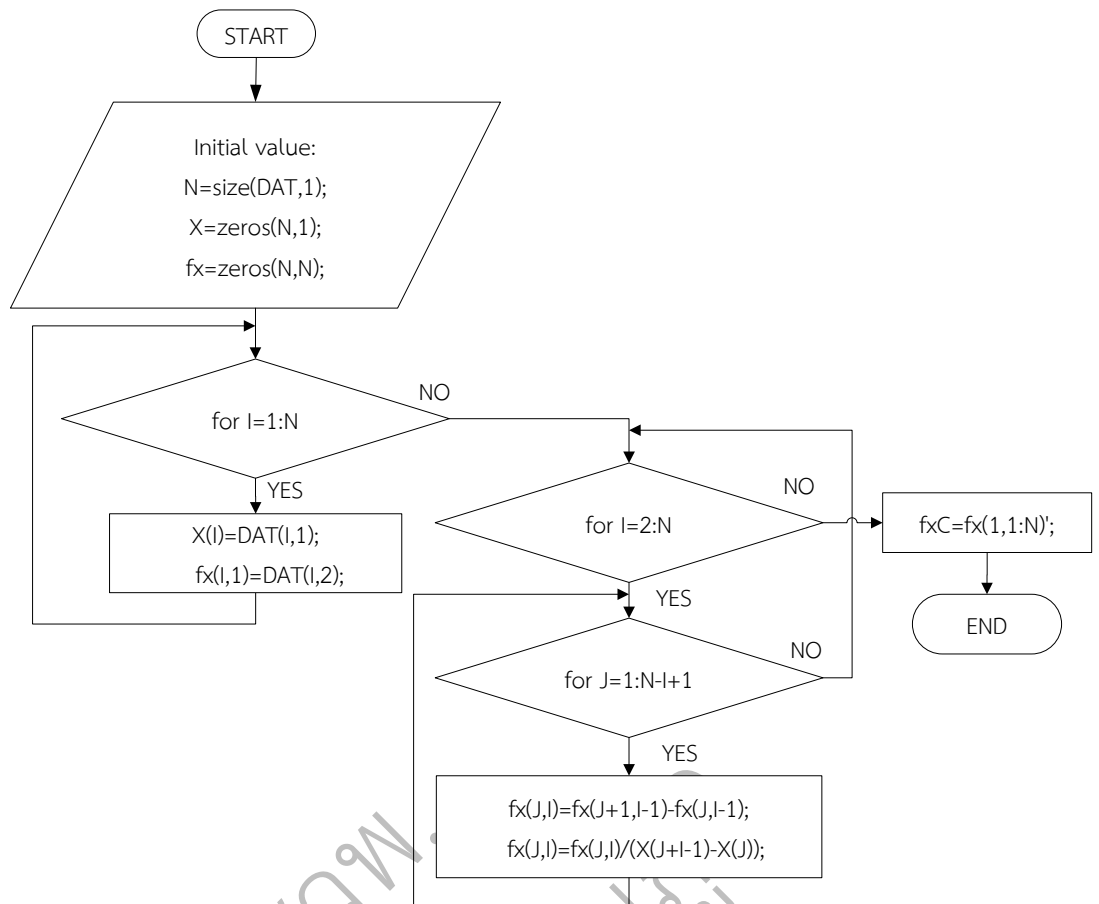
$$\text{เมื่อ } C_0 = f(x_0), C_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}, C_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}}{(x_2 - x_0)}$$

2.2.3.2.3 การประมาณค่าในช่วงฟังก์ชันพหุนามโดยทั่วไป

ถ้ามีมากกว่าสามข้อมูล สามารถใช้การประมาณค่าด้วยสมการฟังก์ชันพหุนามได้ จาก [3] เขียนรูปแบบโดยทั่วไปได้

$$f(x) = C_0(x) + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)(x - x_1) + C_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots + C_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

การประมาณค่าในช่วงฟังก์ชันพหุนามโดยทั่วไปสามารถนำมาเขียนเป็นผังงานได้ดังรูป 2.34 ซึ่งนำไปใช้ได้กับการประมาณค่าในช่วงเชิงกำลังสองและการประมาณค่าในช่วงเชิงเส้นด้วย



รูป 2.34 ผังงานของการประมาณค่าในช่วงฟังก์ชันพหุนามโดยทั่วไปด้วยผลต่างจากการแบ่งย่อยของนิวตัน

บทที่ 3

โปรแกรม SCILAB สำหรับการคำนวณในระเบียบวิธีเชิงเลข

บทนี้จะกล่าวถึงโปรแกรมที่ใช้สำหรับการคำนวณในระเบียบวิธีเชิงเลข ซึ่งสร้างขึ้นจากอัลกอริธึมการคำนวณแบบต่างๆ ในระเบียบวิธีเชิงเลขที่กล่าวไปแล้วในบทที่ 2 และแสดงการคำนวณด้วยเครื่องคิดเลข 4 รอบการทำงานซ้ำ โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อตรวจสอบการคำนวณให้ถูกต้องตรงกันทั้งอัลกอริธึม ผังงานการทำงานแบบรูปภาพ และชุดโปรแกรมการคำนวณ

3.1 การหารากของสมการ

3.1.1 โปรแกรมระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง ผลการทำงาน และการคำนวณด้วยเครื่องคิดเลข

```
deff('[y]=FUNC(x)','y=exp(-x/4.0)*(2.-x)-1.');
```

```
XL=0.0;
```

```
XR=2.0;
```

```
ERR=0.00001;
```

```
if FUNC(XL)*FUNC(XR)>0
```

```
    printf(' Root is not in the given range.\n');
```

```
else
```

```
    printf(' ITERATION XM \n');
```

```
    ITER=1;
```

```
    while ITER<500
```

```
        XM=(XL+XR)/2.0;
```

```
        if FUNC(XM)*FUNC(XR)>0
```

```
            XR=XM;
```

```
        else
```

```
            XL=XM;
```

```
        end
```

```
        printf(' %3d %5f\n',ITER,XM);
```

```
        if abs(FUNC(XL)-FUNC(XR))<ERR
```

```
            break;
```

```
        else
```

```
            ITER=ITER+1;
```

```
        end
```

```
        if ITER>=500
```

```
            printf("\n Divergence.\n");
```

```
        end
```

```
    end
```

```
end
```

รูปที่ 3.1 โปรแกรมระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (ch3_bisection.sci)

ITERATION XM	
1	1.00000
2	0.50000
3	0.75000
4	0.87500
5	0.81250
6	0.78125
7	0.79688
8	0.78906
9	0.78516
10	0.78320
11	0.78418
12	0.78369
13	0.78345
14	0.78357
15	0.78363
16	0.78360
17	0.78358
18	0.78359
19	0.78360

การคำนวณด้วยเครื่องคิดเลขของ $f(x) = e^{-\frac{x}{4}}(2-x) - 1 = 0$

รอบที่ 1:	$x_L = 0, x_R = 2$
การคำนวณ:	$x_M = (x_L + x_R) / 2 = (0 + 2) / 2 = 1$ $f(x_M) = e^{-\frac{x_M}{4}}(2 - x_M) - 1 = e^{-\frac{1}{4}}(2 - 1) - 1 = -0.2211$ $f(x_R) = e^{-\frac{x_R}{4}}(2 - x_R) - 1 = e^{-\frac{2}{4}}(2 - 2) - 1 = -1$ เมื่อ $f(x_M) * f(x_R) = (-0.2211) * (-1) > 0$ ให้แทนค่า x_M ใน x_R หรือ $x_R = 1$
รอบที่ 2:	$x_L = 0, x_R = 1$
การคำนวณ:	$x_M = (x_L + x_R) / 2 = (0 + 1) / 2 = 0.5$ $f(x_M) = e^{-\frac{x_M}{4}}(2 - x_M) - 1 = e^{-\frac{0.5}{4}}(2 - 0.5) - 1 = 0.3237$ $f(x_R) = e^{-\frac{x_R}{4}}(2 - x_R) - 1 = e^{-\frac{1}{4}}(2 - 1) - 1 = -0.2211$ เมื่อ $f(x_M) * f(x_R) = (0.3237) * (-0.2211) < 0$ ให้แทนค่า x_M ใน x_L หรือ $x_L = 0.5$
รอบที่ 3:	$x_L = 0.5, x_R = 1$
การคำนวณ:	$x_M = (x_L + x_R) / 2 = (0.5 + 1) / 2 = 0.75$

	$f(x_M) = e^{-\frac{x_M}{4}}(2 - x_M) - 1 = e^{-\frac{0.75}{4}}(2 - 0.75) - 1 = 0.0362$ $f(x_R) = e^{-\frac{x_R}{4}}(2 - x_R) - 1 = e^{-\frac{1}{4}}(2 - 1) - 1 = -0.2211$ เมื่อ $f(x_M) * f(x_R) = (0.0362) * (-0.2211) < 0$ ให้แทนค่า x_M ใน x_L หรือ $x_L = 0.75$
รอบที่ 4:	$x_L = 0.75, x_R = 1$
การคำนวณ:	$x_M = (x_L + x_R) / 2 = (0.75 + 1) / 2 = 0.875$ $f(x_M) = e^{-\frac{x_M}{4}}(2 - x_M) - 1 = e^{-\frac{0.875}{4}}(2 - 0.875) - 1 = -0.0960$ $f(x_R) = e^{-\frac{x_R}{4}}(2 - x_R) - 1 = e^{-\frac{1}{4}}(2 - 1) - 1 = -0.2211$ เมื่อ $f(x_M) * f(x_R) = (-0.0960) * (-0.2211) > 0$ ให้แทนค่า x_M ใน x_R หรือ $x_R = 0.875$

สวพ.
มทร.สุวรรณภูมิ

3.1.2 โปรแกรมระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ ผลการทำงาน และการคำนวณด้วยเครื่องคิดเลข

```
deff('y=FUNC(x)','y=exp(-x/4.0)*(2.-x)-1.');
```

```
XL=0.0;
```

```
XR=2.0;
```

```
ERR=0.00001;
```

```
if FUNC(XL)*FUNC(XR)>0
```

```
    printf(' Root is not in the given range.\n');
```

```
else
```

```
    printf(' ITERATION XM \n');
```

```
    ITER=1;
```

```
    Xf=XL;
```

```
    while ITER<500
```

```
        Xf0=Xf;
```

```
        Xf=(XR*FUNC(XL)-XL*FUNC(XR))/(FUNC(XL)-FUNC(XR));
```

```
        if FUNC(Xf)*FUNC(XR)>0
```

```
            XR=Xf;
```

```
        else
```

```
            XL=Xf;
```

```
        end
```

```
        printf(' %3d %.5f\n',ITER,Xf);
```

```
        if abs(FUNC(Xf)-FUNC(Xf0))<ERR
```

```
            break;
```

```
        else
```

```
            ITER=ITER+1;
```

```
        end
```

```
        if ITER>=500
```

```
            printf('\n Divergence.\n');
```

```
        end
```

```
    end
```

```
end
```

รูปที่ 3.2 โปรแกรมระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (ch3_falpos.sci)

ITERATION Xf	
1	1.00000
2	0.81887
3	0.78925
4	0.78450
5	0.78374
6	0.78362
7	0.78360
8	0.78360

การคำนวณด้วยเครื่องคิดเลขของ $f(x) = e^{-\frac{x}{4}}(2-x) - 1 = 0$

รอบที่ 1:	$x_L = 0, x_R = 2$
การคำนวณ:	$f(x_L) = e^{-\frac{x_L}{4}}(2-x_L) - 1 = e^{-\frac{0}{4}}(2-0) - 1 = 1.0$ $f(x_R) = e^{-\frac{x_R}{4}}(2-x_R) - 1 = e^{-\frac{2}{4}}(2-2) - 1 = -1$ $x_f = \frac{x_R f(x_L) - x_L f(x_R)}{f(x_L) - f(x_R)} = \frac{(2*1.0) - (0*(-1))}{1 - (-1)} = 1$ $f(x_f) = e^{-\frac{x_f}{4}}(2-x_f) - 1 = e^{-\frac{1}{4}}(2-1) - 1 = -0.2211$ เมื่อ $f(x_f) * f(x_R) = (-0.2211) * (-1) > 0$ ให้แทนค่า x_f ใน x_R หรือ $x_R = 1$
รอบที่ 2:	$x_L = 0, x_R = 1$
การคำนวณ:	$f(x_L) = e^{-\frac{x_L}{4}}(2-x_L) - 1 = e^{-\frac{0}{4}}(2-0) - 1 = 1.0$ $f(x_R) = e^{-\frac{x_R}{4}}(2-x_R) - 1 = e^{-\frac{1}{4}}(2-1) - 1 = -0.2211$ $x_f = \frac{x_R f(x_L) - x_L f(x_R)}{f(x_L) - f(x_R)} = \frac{(1*1.0) - (0*(-0.2211))}{1 - (-0.2211)} = 0.8189$ $f(x_f) = e^{-\frac{x_f}{4}}(2-x_f) - 1 = e^{-\frac{0.8189}{4}}(2-0.8189) - 1 = -0.0375$ เมื่อ $f(x_f) * f(x_R) = (-0.0375) * (-1) > 0$ ให้แทนค่า x_f ใน x_R หรือ $x_R = 0.8189$
รอบที่ 3:	$x_L = 0, x_R = 0.8189$
การคำนวณ:	$f(x_L) = e^{-\frac{x_L}{4}}(2-x_L) - 1 = e^{-\frac{0}{4}}(2-0) - 1 = 1.0$ $f(x_R) = e^{-\frac{x_R}{4}}(2-x_R) - 1 = e^{-\frac{0.8189}{4}}(2-0.8189) - 1 = -0.0375$ $x_f = \frac{x_R f(x_L) - x_L f(x_R)}{f(x_L) - f(x_R)} = \frac{(0.8189*1.0) - (0*(-0.0375))}{1 - (-0.0375)} = 0.7893$ $f(x_f) = e^{-\frac{x_f}{4}}(2-x_f) - 1 = e^{-\frac{0.7893}{4}}(2-0.7893) - 1 = -0.0061$ เมื่อ $f(x_f) * f(x_R) = (-0.0061) * (-1) > 0$ ให้แทนค่า x_f ใน x_R หรือ $x_R = 0.7893$
รอบที่ 4:	$x_L = 0, x_R = 0.7893$
การคำนวณ:	$f(x_L) = e^{-\frac{x_L}{4}}(2-x_L) - 1 = e^{-\frac{0}{4}}(2-0) - 1 = 1.0$ $f(x_R) = e^{-\frac{x_R}{4}}(2-x_R) - 1 = e^{-\frac{0.7893}{4}}(2-0.7893) - 1 = -0.0061$

$$x_f = \frac{x_R f(x_L) - x_L f(x_R)}{f(x_L) - f(x_R)} = \frac{((0.7893*1.0) - (0*(-0.0061)))}{1 - (-0.0061)} = 0.7845$$

$$f(x_f) = e^{-\frac{x_f}{4}} (2 - x_f) - 1 = e^{-\frac{0.7845}{4}} (2 - 0.7845) - 1 = -0.0009$$

เมื่อ $f(x_f) * f(x_R) = (-0.0009) * (-1) > 0$

ให้แทนค่า x_f ใน x_R หรือ $x_R = 0.7845$

3.1.3 โปรแกรมระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบหนึ่งจุด ผลการทำงาน และการคำนวณด้วยเครื่องคิดเลข

```
deff('y)=FUNC(x)','y=(2.-exp(x/4.0))');
XNOW=0.0;
ERR=0.00001;
ITER=1;
printf(' ITERATION XNEW \n');
while ITER<500
    XNEW=FUNC(XNOW);
    printf(' %3d %10.5f\n ',ITER,XNEW);
    if abs(XNEW-XNOW)<ERR
        break;
    else
        ITER=ITER+1;
    end
    if ITER>=500
        printf('\n Divergence.\n');
    end
    XNOW=XNEW;
end
```

รูปที่ 3.3 โปรแกรมระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบหนึ่งจุด (ch3_onepoint.sci)

ITERATION	XNEW
1	1.00000
2	0.71597
3	0.80399
4	0.77738
5	0.78549
6	0.78302
7	0.78377
8	0.78354
9	0.78361
10	0.78359
11	0.78360

การคำนวณด้วยเครื่องคิดเลขของ $f(x) = e^{-\frac{x}{4}}(2-x) - 1 = 0$

รอบที่ 1:	$x_i = 0$
การคำนวณ:	$x_{i+1} = 2 - e^{\frac{x_i}{4}} = 2 - e^{\frac{0}{4}} = 1.0$ ให้แทนค่า x_{i+1} ใน x_i
รอบที่ 2:	$x_i = 1.0$
การคำนวณ:	$x_{i+1} = 2 - e^{\frac{x_i}{4}} = 2 - e^{\frac{1.0}{4}} = 0.7159$ ให้แทนค่า x_{i+1} ใน x_i
รอบที่ 3:	$x_i = 0.7159$
การคำนวณ:	$x_{i+1} = 2 - e^{\frac{x_i}{4}} = 2 - e^{\frac{0.7159}{4}} = 0.8040$ ให้แทนค่า x_{i+1} ใน x_i
รอบที่ 4:	$x_i = 0.8040$
การคำนวณ:	$x_{i+1} = 2 - e^{\frac{x_i}{4}} = 2 - e^{\frac{0.8040}{4}} = 0.7773$ ให้แทนค่า x_{i+1} ใน x_i

3.1.4 โปรแกรมระเบียบวิธีของนิวตัน-ราฟสัน ผลการทำงาน และการคำนวณด้วยเครื่องคิดเลข

<pre> deff('y'=FUNC(x),'y=exp(-x/4.0)*(2.-x)-1.');</pre>
<pre> deff('y'=DERIV(x),'y=-exp(-x/4.0)*(1.5-x/4.0)');</pre>
<pre> XNOW=0.0; ERR=0.00001;</pre>
<pre> ITER=1; printf(' ITERATION XNEW \n');</pre>
<pre> while ITER<500</pre>
<pre> XNEW=XNOW-FUNC(XNOW)/DERIV(XNOW);</pre>
<pre> printf(' %3d %10.5f\n',ITER,XNEW);</pre>
<pre> if abs(XNEW-XNOW)<ERR</pre>
<pre> break;</pre>
<pre> else</pre>
<pre> ITER=ITER+1;</pre>
<pre> end</pre>
<pre> if ITER>=500</pre>
<pre> printf('\n Divergence.\n');</pre>
<pre> end</pre>
<pre> XNOW=XNEW; end</pre>

รูปที่ 3.4 โปรแกรมระเบียบวิธีของนิวตัน-ราฟสัน (ch3_newton.sci)

ITERATION XNEW

1	0.66667
2	0.78065
3	0.78359
4	0.78360

การคำนวณด้วยเครื่องคิดเลขของ $f(x) = e^{-\frac{x}{4}}(2-x) - 1 = 0$

รอบที่ 1:	$x_i = 0$
การคำนวณ:	$f(x) = e^{-\frac{x}{4}}(2-x) - 1 = e^{-\frac{0}{4}}(2-0) - 1 = 1$ $\frac{df(x)}{dx} = -e^{-\frac{x}{4}}\left(1.5 - \frac{x}{4}\right) = -e^{-\frac{0}{4}}\left(1.5 - \frac{0}{4}\right) = -1.5$ $x = x_0 + \Delta x = 0 - \frac{1}{-1.5} = -0.6666$
รอบที่ 2:	$x_i = -0.6666$
การคำนวณ:	$f(x) = e^{-\frac{x}{4}}(2-x) - 1 = e^{-\frac{0.6666}{4}}(2-0.6666) - 1 = 0.1286$ $\frac{df(x)}{dx} = -e^{-\frac{x}{4}}\left(1.5 - \frac{x}{4}\right) = -e^{-\frac{0.6666}{4}}\left(1.5 - \frac{0.6666}{4}\right) = -1.1286$ $x = x_0 + \Delta x = 0.6666 - \frac{0.1286}{-1.1286} = 0.7806$
รอบที่ 3:	$x_i = 0.7806$
การคำนวณ:	$f(x) = e^{-\frac{x}{4}}(2-x) - 1 = e^{-\frac{0.7806}{4}}(2-0.7806) - 1 = 0.0032$ $\frac{df(x)}{dx} = -e^{-\frac{x}{4}}\left(1.5 - \frac{x}{4}\right) = -e^{-\frac{0.7806}{4}}\left(1.5 - \frac{0.7806}{4}\right) = -1.0734$ $x = x_0 + \Delta x = 0.7806 - \frac{0.0032}{-1.0734} = 0.7835$
รอบที่ 4:	$x_i = 0.7835$
การคำนวณ:	$f(x) = e^{-\frac{x}{4}}(2-x) - 1 = e^{-\frac{0.7835}{4}}(2-0.7835) - 1 = 0.0001$ $\frac{df(x)}{dx} = -e^{-\frac{x}{4}}\left(1.5 - \frac{x}{4}\right) = -e^{-\frac{0.7835}{4}}\left(1.5 - \frac{0.7835}{4}\right) = -1.0721$ $x = x_0 + \Delta x = 0.7835 - \frac{0.0001}{-1.0721} = 0.7835$

3.1.5 โปรแกรมระเบียบวิธีเซแคนต์ ผลการทำงาน และการคำนวณด้วยเครื่องคิดเลข

```
deff('y)=FUNC(x)','y=exp(-x/4.0)*(2.-x)-1.');
```

```
XOLD=3.0;
```

```
XNOW=2.0;
```

```
ERR=0.00001;
```

```
ITER=1;
```

```
printf(' ITERATION XNEW \n');
```

```
while ITER<500
```

```
    XNEW=XNOW-(FUNC(XNOW)*(XNOW-XOLD))/(FUNC(XNOW)-FUNC(XOLD));
```

```
    printf(' %3d %5f\n',ITER,XNEW);
```

```
    if abs(XNEW-XNOW)<ERR
```

```
        break;
```

```
    else
```

```
        ITER=ITER+1;
```

```
    end
```

```
    if ITER>=500
```

```
        printf('\n Divergence.\n');
```

```
    end
```

```
    XOLD=XNOW;
```

```
    XNOW=XNEW;
```

```
end
```

รูปที่ 3.5 โปรแกรมระเบียบวิธีเซแคนต์ (ch3_secant.sci)

ITERATION	XNEW
1	-0.11700
2	1.02883
3	0.82909
4	0.78106
5	0.78362
6	0.78360
7	0.78360

การคำนวณด้วยเครื่องคิดเลขของ $f(x) = e^{-\frac{x}{4}}(2-x) - 1 = 0$

รอบที่ 1:	$x_{NOW} = 2.0, x_{OLD} = 3.0$
การคำนวณ:	$f(x_{NOW}) = e^{-\frac{2.0}{4}}(2-2.0) - 1 = -1$ $f(x_{OLD}) = e^{-\frac{3.0}{4}}(2-3.0) - 1 = -1.47236$ $x_{NEW} = x_{NOW} - \frac{f(x_{NOW})(x_{NOW} - x_{OLD})}{f(x_{NOW}) - f(x_{OLD})}$ $x_{NEW} = 2.0 - \left[\frac{(-1)(2-3)}{(-1) - (-1.47236)} \right] = -0.11702$
รอบที่ 2:	$x_{NOW} = -0.11702, x_{OLD} = 2.0$
การคำนวณ:	$f(x_{NOW}) = e^{-\frac{-0.11702}{4}}(2+0.11702) - 1 = 1.17986$ $f(x_{OLD}) = e^{-\frac{2.0}{4}}(2-2.0) - 1 = -1$ $x_{NEW} = x_{NOW} - \frac{f(x_{NOW})(x_{NOW} - x_{OLD})}{f(x_{NOW}) - f(x_{OLD})}$ $x_{NEW} = -0.11702 - \left[\frac{(1.17986)(-0.11702-2)}{(1.17986) - (-1)} \right] = 1.02882$
รอบที่ 3:	$x_{NOW} = 1.02882, x_{OLD} = -0.11702$
การคำนวณ:	$f(x_{NOW}) = e^{-\frac{1.02882}{4}}(2-1.02882) - 1 = -0.24907$ $f(x_{OLD}) = e^{-\frac{-0.11702}{4}}(2+0.11702) - 1 = 1.17986$ $x_{NEW} = x_{NOW} - \frac{f(x_{NOW})(x_{NOW} - x_{OLD})}{f(x_{NOW}) - f(x_{OLD})}$ $x_{NEW} = 1.02882 - \left[\frac{(-0.24907)(1.02882+0.11702)}{(-0.24907) - (1.17986)} \right] = 0.82909$
รอบที่ 4:	$x_{NOW} = 0.82909, x_{OLD} = 1.02882$
การคำนวณ:	$f(x_{NOW}) = e^{-\frac{0.82909}{4}}(2-0.82909) - 1 = -0.04828$ $f(x_{OLD}) = e^{-\frac{1.02882}{4}}(2-1.02882) - 1 = -0.24907$ $x_{NEW} = x_{NOW} - \frac{f(x_{NOW})(x_{NOW} - x_{OLD})}{f(x_{NOW}) - f(x_{OLD})}$ $x_{NEW} = 0.82909 - \left[\frac{(-0.04828)(0.82909-1.02882)}{(-0.04828) - (-0.24907)} \right] = 0.78106$

3.2 การแก้ระบบสมการเชิงเส้น

3.2.1 โปรแกรมระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ ผลการทำงาน และการคำนวณด้วยเครื่องคิดเลข

```
function [X]=Gauss1(A,B)
N=size(A,1);
X=zeros(N,1);
for ip=1:N-1
    for ie=ip+1:N
        Ratio=A(ie,ip)/A(ip,ip);
        for ic=ip+1:N
            A(ie,ic)=A(ie,ic)-Ratio*A(ip,ic);
        end
        B(ie)=B(ie)-Ratio*B(ip);
    end
    for ie=ip+1:N
        A(ie,ip)=0;
    end
end
X(N)=B(N)/A(N,N);
for ie=N-1:-1:1
    Sum=0;
    for ic=ie+1:N
        Sum=Sum+A(ie,ic)*X(ic);
    end
    X(ie)=(B(ie)-Sum)/A(ie,ie);
end
A1=A
B2=B
endfunction
```

รูปที่ 3.6 โปรแกรมระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ (ch3_gauss1.sci)

```
A=[ 3 -1 -2;
    -1 6 -3;
    -2 -3 6]
B=[ 1;
    0;
    6]
[X]=Gauss1(A,B)
```

รูปที่ 3.7 ตัวอย่างโปรแกรมสั่งการคำนวณด้วยระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ (ch3_gaussEl1.sci)

--> A =

$$3. \quad -1. \quad -2.$$

$$-1. \quad 6. \quad -3.$$

$$-2. \quad -3. \quad 6.$$

B =

$$1.$$

$$0.$$

$$6.$$

X =

$$3.$$

$$2.$$

$$3.$$

การคำนวณด้วยเครื่องคิดเลขของ

$$3x_1 - 1x_2 - 2x_3 = 1$$

$$-1x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0$$

$$-2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 6$$

การกำจัดไปข้างหน้า

การคำนวณ

$$3x_1 \quad -1x_2 \quad -2x_3 = 1$$

$$(-1+1)x_1 \quad (6-(1/3))x_2 \quad (-3-(2/3))x_3 = 0 - (-1/3)$$

$$(-2+2)x_1 \quad (-3-(2/3))x_2 \quad (6-(4/3))x_3 = 6 - (-2/3)$$

จะได้

$$3x_1 \quad -1x_2 \quad -2x_3 = 1$$

$$0 \quad (17/3)x_2 \quad -(11/3)x_3 = 1/3$$

$$0 \quad -(11/3)x_2 \quad (14/3)x_3 = 20/3$$

การคำนวณ

$$3x_1 \quad -1x_2 \quad -2x_3 = 1$$

$$0 \quad (17/3)x_2 \quad -(11/3)x_3 = 1/3$$

$$0 \quad 0 \quad ((14/3) - ((-11/3) * (-11/17)))x_3 = (20/3) - (-11/17)$$

จะได้

$$3x_1 \quad -1x_2 \quad -2x_3 = 1$$

$$0 \quad (17/3)x_2 \quad -(11/3)x_3 = 1/3$$

$$0 \quad 0 \quad (351/153)x_3 = 351/51$$

การแทนค่าย้อนกลับ

$$x_3 = (351/51)/(351/153) = 3$$

$$x_2 = ((1/3) + ((11/3) * 3))/(17/3) = 2$$

$$x_1 = ((1) + ((2) * 3) + ((1) * 2))/(3) = 3$$

```

function [A,B]=Pivot(A,B,ip)
JP=ip;
N=size(A,1);
Big=abs(A(ip,ip));
for i=ip+1:N
    Amax=abs(A(i,ip));
    if Amax>Big
        Big=Amax;
        JP=i;
    end
end
if JP~=ip
    for J=ip:N
        Dummy=A(JP,J);
        A(JP,J)=A(ip,J);
        A(ip,J)=Dummy;
    end
    Dummy=B(JP);
    B(JP)=B(ip);
    B(ip)=Dummy;
end
endfunction

```

รูปที่ 3.8 โปรแกรมการเลือกตัวหลัก (ch3_pivot.sci)

```

function [A,B]=Scale(A,B)
N=size(A,1);
for ie=1:N
    Big=abs(A(ie,1));
    for ic=2:N
        Amax=abs(A(ie,ic));
        if Amax>Big
            Big=Amax;
        end
    end
    for ic=1:N
        A(ie,ic)=A(ie,ic)/Big;
    end
    B(ie)=B(ie)/Big;
end
endfunction

```

รูปที่ 3.9 โปรแกรมการจัดสเกล (ch3_scale.sci)

```

function [X]=Gauss2(A,B)
N=size(A,1);
X=zeros(N,1);
[A,B]=Scale(A,B); // Scaling
for ip=1:N-1
    [A,B]=Pivot(A,B,ip); // Pivoting
    for ie=ip+1:N
        Ratio=A(ie,ip)/A(ip,ip);
        for ic=ip+1:N
            A(ie,ic)=A(ie,ic)-Ratio*A(ip,ic);
        end
        B(ie)=B(ie)-Ratio*B(ip);
    end
    for ie=ip+1:N
        A(ie,ip)=0;
    end
end
X(N)=B(N)/A(N,N);
for ie=N-1:-1:1
    Sum=0;
    for ic=ie+1:N
        Sum=Sum+A(ie,ic)*X(ic);
    end
    X(ie)=(B(ie)-Sum)/A(ie,ie);
end
endfunction

```

รูปที่ 3.10 โปรแกรมระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ที่ปรับปรุงแล้ว (ch3_gauss2.sci)

```

A=[ 2000000 1000000;
    0.000001 0.000001]
B=[ 1000000;
    0.000002]
[X]=Gauss2(A,B)

```

รูปที่ 3.11 ตัวอย่างโปรแกรมสั่งการคำนวณด้วยระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ที่ปรับปรุงแล้ว (ch3_gaussEli2.sci)

```

A =
    2000000.    1000000.
    0.000001    0.000001
B =

```

1000000.
0.000002
X =
- 1.
3.

การคำนวณด้วยเครื่องคิดเลขของ

$$\begin{bmatrix} 2,000,000 & 1,000,000 \\ 0.000001 & 0.000001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,000,000 \\ 0.000002 \end{bmatrix}$$

การจัดสเกล

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

การเลือกตัวหลัก (ไม่เปลี่ยน)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

การกำจัดไปข้างหน้า

การคำนวณ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ (0.5 - 0.5) & (0.5 - (0.5 * 0.5)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 - (0.5 * 0.5) \end{bmatrix}$$

จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

การแทนค่าย้อนกลับ

$$x_2 = (0.75 / 0.25) = 3$$

$$x_1 = \frac{0.5 - (0.5 * 3)}{1} = -1$$

3.2.2 โปรแกรมระเบียบวิธีของเกาส์-จอร์แดน ผลการทำงาน และการคำนวณด้วยเครื่องคิดเลข

```
function [D]=GaussJordan(A,B)
N=size(A,1);
for ip=1:N-1
    for ie=ip+1:N
        Ratio=A(ie,ip)/A(ip,ip);
        for ic=ip+1:N
            A(ie,ic)=A(ie,ic)-Ratio*A(ip,ic);
        end
        B(ie)=B(ie)-Ratio*B(ip);
    end
end
```

```

end
for ie=ip+1:N
    A(ie,ip)=0;
end
end
for ip=1:N
    Ratio=1/A(ip,ip);
    for ic=ip:N
        A(ip,ic)=A(ip,ic)*Ratio;
    end
    B(ip)=B(ip)*Ratio;
end
for ip=1:N-1
    for ie=ip+1:N
        Ratio=-A(ip,ie);
        for ic=ie:N
            A(ip,ic)=A(ip,ic)+Ratio*A(ie,ic);
        end
        B(ip)=B(ip)+Ratio*B(ie);
    end
end
D= [A B]
endfunction

```

รูปที่ 3.12 โปรแกรมระเบียบวิธีของเกาส์-จอร์แดน (ch3_GaussJordan.sci)

```

A = [ 3 -1 -2; -1 6 -3; -2 -3 6 ]
b = [ 1; 0; 6 ]
[D]=GaussJordan(A,B)

```

รูปที่ 3.13 ตัวอย่างโปรแกรมสั่งการคำนวณด้วยระเบียบวิธีของเกาส์-จอร์แดน (ch3_GaussJordanEli1.sci)

```

A =
    3.  - 1.  - 2.
   - 1.   6.  - 3.
   - 2.  - 3.   6.

B =
    1.
    0.
    6.

D =

```

1.	0.	0.	3.
0.	1.	0.	2.
0.	0.	1.	3.

การคำนวณด้วยเครื่องคิดเลขของ

$$3x_1 - 1x_2 - 2x_3 = 1$$

$$-1x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0$$

$$-2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 6$$

การกำจัดไปข้างหน้าแบบเกาส์

การคำนวณครั้งที่ 1

$$\begin{array}{rrrr} 3x_1 & -1x_2 & -2x_3 & = 1 \\ (-1+1)x_1 & (6-(1/3))x_2 & (-3-(2/3))x_3 & = 0 - (-1/3) \\ (-2+2)x_1 & (-3-(2/3))x_2 & (6-(4/3))x_3 & = 6 - (-2/3) \end{array}$$

จะได้

$$\begin{array}{rrrr} 3x_1 & -1x_2 & -2x_3 & = 1 \\ 0 & (17/3)x_2 & -(11/3)x_3 & = 1/3 \\ 0 & -(11/3)x_2 & (14/3)x_3 & = 20/3 \end{array}$$

การคำนวณครั้งที่ 2

$$\begin{array}{rrrr} 3x_1 & -1x_2 & -2x_3 & = 1 \\ 0 & (17/3)x_2 & -(11/3)x_3 & = 1/3 \\ 0 & 0 & ((14/3) - ((-11/3) * (-11/17)))x_3 & = (20/3) - (-11/17) \end{array}$$

จะได้

$$\begin{array}{rrrr} 3x_1 & -1x_2 & -2x_3 & = 1 \\ 0 & (17/3)x_2 & -(11/3)x_3 & = 1/3 \\ 0 & 0 & (351/153)x_3 & = 351/51 \end{array}$$

ทำต่อจากการกำจัดไปข้างหน้าแบบเกาส์

การคำนวณครั้งที่ 3 (ทำให้สัมประสิทธิ์ในแนวเส้นทแยงมุมเป็นหนึ่ง)

$$\begin{array}{rrrr} \frac{3}{3}x_1 & -\frac{1}{3}x_2 & -\frac{2}{3}x_3 & = \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{(17/3)}{(17/3)}x_2 & -\frac{(11/3)}{(17/3)}x_3 & = \frac{1/3}{(17/3)} \\ 0 & 0 & \frac{(351/153)}{(351/153)}x_3 & = \frac{351/51}{(351/153)} \end{array}$$

จะได้

$$\begin{array}{ccccccc} 1x_1 & -\frac{1}{3}x_2 & -\frac{2}{3}x_3 & = & \frac{1}{3} \\ 0 & 1x_2 & -(11/17)x_3 & = & 1/17 \\ 0 & 0 & 1x_3 & = & 3 \end{array}$$

การคำนวณครั้งที่ 4(ทำให้สัมประสิทธิ์เหนือแนวเส้นทแยงมุมเป็นศูนย์) นำ $\frac{1}{3}$ คูณสมการที่สองและนำไปบวกกับสมการที่หนึ่ง

$$\begin{array}{ccccccc} 1x_1 & \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)x_2 & -\frac{2}{3} - \left(\frac{11}{17} * \frac{1}{3}\right)x_3 & = & \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{17} * \frac{1}{3}\right) \\ 0 & 1x_2 & -(11/17)x_3 & = & 1/17 \\ 0 & 0 & 1x_3 & = & 3 \end{array}$$

จะได้

$$\begin{array}{ccccccc} 1x_1 & 0 & -\frac{45}{17*3}x_3 & = & \frac{18}{17*3} \\ 0 & 1x_2 & -(11/17)x_3 & = & 1/17 \\ 0 & 0 & 1x_3 & = & 3 \end{array}$$

การคำนวณครั้งที่ 5(ทำให้สัมประสิทธิ์เหนือแนวเส้นทแยงมุมเป็นศูนย์) นำ $\frac{45}{17*3}$ คูณสมการที่สามและนำไปบวกกับสมการที่หนึ่ง

$$\begin{array}{ccccccc} 1x_1 & 0 & -\frac{45}{17*3} + \frac{45}{17*3}x_3 & = & \frac{18}{17*3} + \left(\left(\frac{45}{17*3}\right)*3\right) \\ 0 & 1x_2 & -(11/17)x_3 & = & 1/17 \\ 0 & 0 & 1x_3 & = & 3 \end{array}$$

จะได้

$$\begin{array}{ccccccc} 1x_1 & 0 & 0 & = & 3 \\ 0 & 1x_2 & -(11/17)x_3 & = & 1/17 \\ 0 & 0 & 1x_3 & = & 3 \end{array}$$

การคำนวณครั้งที่ 6(ทำให้สัมประสิทธิ์เหนือแนวเส้นทแยงมุมเป็นศูนย์) นำ $\frac{11}{17}$ คูณสมการที่สามและนำไปบวกกับสมการที่สอง

$$\begin{array}{ccccccc} 1x_1 & 0 & 0 & = & 3 \\ 0 & 1x_2 & \left(-\frac{11}{17} + \frac{11}{17}\right)x_3 & = & \left(\frac{1}{17}\right) + \left(\frac{11}{17} * \frac{1}{17}\right) \\ 0 & 0 & 1x_3 & = & 3 \end{array}$$

จะได้

$$\begin{array}{rrcr} 1x_1 & 0 & 0 & = 3 \\ 0 & 1x_2 & 0 & = 2 \\ 0 & 0 & 1x_3 & = 3 \end{array}$$

3.2.3 โปรแกรมระเบียบวิธีการทำเมทริกซ์ผกผัน ผลการทำงาน และการคำนวณด้วยเครื่องคิดเลข

```
function [A1,B1]=GaussJordanInverse(A,B)
N=size(A,1);
for ip=1:N-1
    for ie=ip+1:N
        Ratio=A(ie,ip)/A(ip,ip);
        for ic=1:N
            A(ie,ic)=A(ie,ic)-Ratio*A(ip,ic);
            B(ie,ic)=B(ie,ic)-Ratio*B(ip,ic);
        end
    end
end
for ip=1:N
    Ratio=1/A(ip,ip);
    for ic=1:N
        A(ip,ic)=A(ip,ic)*Ratio;
        B(ip,ic)=B(ip,ic)*Ratio;
    end
end
for ip=1:N-1
    for ie=ip+1:N
        Ratio=-A(ip,ie);
        for ic=1:N
            A(ip,ic)=A(ip,ic)+Ratio*A(ie,ic);
            B(ip,ic)=B(ip,ic)+Ratio*B(ie,ic);
        end
    end
end
A1=A
B1=B
endfunction
```

รูปที่ 3.14 โปรแกรมระเบียบวิธีการทำเมทริกซ์ผกผัน (ch3_ GaussJordan_Inverse.sci)

```
A = [ 4 -4 0; -1 4 -2; 0 -2 4 ]
B = [ 1 0 0; 0 1 0; 0 0 1 ]
[A1,B1]=GaussJordanInverse(A,B)
```

รูปที่ 3.15 ตัวอย่างโปรแกรมสั่งการคำนวณด้วยระเบียบวิธีการทำเมทริกซ์ผกผัน (ch3_GaussJordan_Inverse Eli1.sci)

```
A =
    4.  -4.   0.
   -1.   4.  -2.
    0.  -2.   4.
B =
    1.   0.   0.
    0.   1.   0.
    0.   0.   1.
B1 =
    0.375    0.5    0.25
    0.125    0.5    0.25
    0.0625   0.25   0.375
A1 =
    1.   0.   0.
    0.   1.   0.
    0.   0.   1.
```

การคำนวณด้วยเครื่องคิดเลขของ

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} [A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \dots\dots\dots(1) \\ \dots\dots\dots(2) \\ \dots\dots\dots(3) \end{matrix}$$

การกำจัดไปข้างหน้าแบบเกาส์

การคำนวณครั้งที่ 1 โดย $(2) - \left(\frac{-1}{4} * (1)\right)$ จะได้

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} [A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \dots\dots\dots(4) \\ \dots\dots\dots(5) \\ \dots\dots\dots(6) \end{matrix}$$

การคำนวณครั้งที่ 2 โดย $(6) - \left(\frac{-2}{3} * (5)\right)$ จะได้

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & \left(4 - \frac{4}{3}\right) \end{bmatrix} [A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{2}{12} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

ทำต่อจากการกำจัดไปข้างหน้าแบบเกาส์

การคำนวณครั้งที่ 3(ทำให้สัมประสิทธิ์ในแนวเส้นทแยงมุมเป็นหนึ่ง)
จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{12} * \frac{3}{8} & \frac{2}{3} * \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \begin{matrix} \dots\dots\dots(7) \\ \dots\dots\dots(8) \\ \dots\dots\dots(9) \end{matrix}$$

การคำนวณครั้งที่ 4(ทำให้สัมประสิทธิ์เหนือแนวเส้นทแยงมุมเป็นศูนย์) (7)+(8)
จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \begin{matrix} \dots\dots\dots(10) \\ \dots\dots\dots(11) \\ \dots\dots\dots(12) \end{matrix}$$

การคำนวณครั้งที่ 5(ทำให้สัมประสิทธิ์เหนือแนวเส้นทแยงมุมเป็นศูนย์) (10)+(12)* $\left(\frac{2}{3}\right)$
จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \frac{1}{16} * \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{12} * \frac{3}{8} & \frac{2}{3} * \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \begin{matrix} \dots\dots\dots(13) \\ \dots\dots\dots(14) \\ \dots\dots\dots(15) \end{matrix}$$

การคำนวณครั้งที่ 6(ทำให้สัมประสิทธิ์เหนือแนวเส้นทแยงมุมเป็นศูนย์)

นำ(14)+(15)* $\left(\frac{2}{3}\right)$ จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \begin{matrix} \dots\dots\dots(13) \\ \dots\dots\dots(14) \\ \dots\dots\dots(15) \end{matrix}$$

3.2.4 โปรแกรมระเบียบวิธีการแยกแบบแอลยู ผลการทำงาน และการคำนวณด้วยเครื่องคิด

เลข

```
function X=fLU(A,B)
N=size(A,1)
L=zeros(N,N); U=zeros(N,N);
Y=zeros(N,1); X=zeros(N,1);
for l=1:N L(l,1)=A(l,1); end
for J=2:N U(1,J)=A(1,J)/L(1,1); end
for J=2:N-1
    for l=J:N
        Sum=0.0;
        for K=1:J-1
            Sum=Sum+L(l,K)*U(K,J);
        end
        L(l,J)=A(l,J)-Sum;
    end
    for K=J+1:N
        Sum=0.0;
        for l=1:J-1 Sum=Sum+L(J,l)*U(l,K);
        end
        U(J,K)=(A(J,K)-Sum)/L(J,J);
    end
end
Sum=0.0;
for K=1:N-1 Sum=Sum+L(N,K)*U(K,N);
end
L(N,N)=A(N,N)-Sum;
Y(1)=B(1)/L(1,1);
for l=2:N
    Sum=0.0;
    for J=1:l-1 Sum=Sum+L(l,J)*Y(J);
    end
    Y(l)=(B(l)-Sum)/L(l,l);
end
X(N)=Y(N);
for l=N-1:-1:1
    Sum=0.0;
    for J=l+1:N Sum=Sum+U(l,J)*X(J); end
    X(l)=Y(l)-Sum;
end
endfunction
```

รูปที่ 3.16 โปรแกรมระเบียบวิธีการแยกแบบแอลยู (ch3_ fLU.sci)

```

A=[ 4 -4 0;
   -1 4 -2;
    0 -2 4]
B=[ 400;
   400;
   400]
X=fLU(A,B)

```

รูปที่ 3.17 ตัวอย่างโปรแกรมสั่งการคำนวณด้วยระเบียบวิธีการแยกแบบแอลยู
(ch3_LUdecomposition.sci)

```

A =
    4. - 4.  0.
   - 1.  4. - 2.
    0. - 2.  4.
B =
    400.
    400.
    400.
X =
    450.
    350.
    275.

```

การคำนวณด้วยเครื่องคิดเลขของ

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{bmatrix}$$

การหาเมทริกส์ [L] [U]

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

การแทนค่าแบบไปข้างหน้า

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{bmatrix}$$

จะได้

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ \frac{500}{3} \\ 275 \end{bmatrix}$$

การแทนค่าย้อนกลับ

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ \frac{500}{3} \\ 275 \end{bmatrix}$$

จะได้

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 450 \\ 350 \\ 275 \end{bmatrix}$$

3.2.5 โปรแกรมระเบียบวิธีการแยกแบบโคเลซกี ผลการทำงาน และการคำนวณด้วยเครื่อง

คิดเลข

```
function X=Cholesky(A,B)
N=size(A,1);
LT=zeros(N,N);
Y=zeros(N,1);
X=zeros(N,1);
LT(1,1)=sqrt(A(1,1));
for K=2:N
    for l=1:K-1
        Sum=0.0;
        if l~=1
            for J=1:l-1 Sum=Sum+LT(l,J)*LT(K,J);
            end
        end
        LT(K,l)=(A(K,l)-Sum)/LT(l,l);
    end
    Sum=0.0;
    for J=1:K-1 Sum=Sum+LT(K,J)*LT(K,J);
    end
    LT(K,K)=sqrt(A(K,K)-Sum);
end
Y(1)=B(1)/LT(1,1);
for l=2:N
    Sum=0.0;
    for J=1:l-1 Sum=Sum+LT(l,J)*Y(J);
    end
```

```

        Y(l)=(B(l)-Sum)/LT(l,l);
    end
    X(N)=Y(N)/LT(N,N);
    for l=N-1:-1:1
        Sum=0.0;
        for J=l+1:N Sum=Sum+LT(J,l)*X(J);
        end
        X(l)=(Y(l)-Sum)/LT(l,l);
    end
endfunction

```

รูปที่ 3.18 โปรแกรมระเบียบวิธีการแยกแบบโคเลซกี (ch3_ Cholesky.sci)

```

A=[ 1 -1 0;
   -1 4 -2;
    0 -2 4]
B=[ 100;
   400;
   400]
X=Cholesky(A,B)

```

รูปที่ 3.19 ตัวอย่างโปรแกรมสั่งการคำนวณด้วยระเบียบวิธีการแยกแบบโคเลซกี (ch3_ CholeskyDec.sci)

```

A =
    1.  -1.   0.
   -1.   4.  -2.
    0.  -2.   4.
B =
   100.
   400.
   400.
X =
   450.
   350.
   275.

```

การคำนวณด้วยเครื่องคิดเลขของ

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 400 \\ 400 \end{bmatrix}$$

การหาเมทริกส์ $[A]=[L][L]^T$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1.732 & 0 \\ 0 & -1.154 & 1.632 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1.732 & -1.154 \\ 0 & 0 & 1.632 \end{bmatrix}$$

การแทนค่าแบบไปข้างหน้า

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1.732 & 0 \\ 0 & -1.154 & 1.632 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 400 \\ 400 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ \frac{500}{1.732} \\ \frac{400 + (1.154 * 500 / 1.732)}{1.632} \end{bmatrix}$$

การแทนค่าย้อนกลับ

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1.732 & -1.154 \\ 0 & 0 & 1.632 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 288.684 \\ 449.228 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1.732 & -1.154 \\ 0 & 0 & 1.632 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 + \frac{288.684 + (1.154 * 275.262)}{1.732} \\ \frac{288.684 + (1.154 * 275.262)}{1.732} \\ 275.262 \end{bmatrix}$$

จะได้

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 450.078 \\ 350.078 \\ 275.262 \end{bmatrix}$$

3.2.6 โปรแกรมระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบยาโคบี ผลการทำงาน และการคำนวณด้วยเครื่องคิดเลข

```
function X=Jacobi(A,B,X0,ERR)
N=size(A,1);
printf('Jacobi Iteration...\nIteration ');
for l=1:N printf(' X%d ',l); end
```

```

printf('\n');
X=X0;
Iter=1;
Reached=0;
while ~Reached
    printf(' %d ',Iter);
    X0=X;
    for I=1:N
        Sum=B(I);
        for J=1:N
            if I~=J
                Sum=Sum-A(I,J)*X0(J);
            end
        end
        X(I)=Sum/A(I,I);
        printf(' %.2f ',X(I));
    end
    printf('\n');
    Reached=1;
    for I=1:N
        if abs((X(I)-X0(I))*100/(X(I)))>ERR
            Reached=0;
            break;
        end
    end
    Iter=Iter+1;
    if Iter>100
        printf('Divergence.\n');
        break;
    end
end
endfunction

```

รูปที่ 3.20 โปรแกรมระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบยาโคบี (ch3_ Jacobi.sci)

```

A=[ 4 -4 0;
    -1 4 -2;
    0 -2 4]
B=[ 400;
    400;
    400]

```

```

X0=[ 100;
     100;
     100]
ERR=0.05
X=Jacobi(A,B,X0,ERR)

```

รูปที่ 3.21 ตัวอย่างโปรแกรมสั่งการคำนวณด้วยระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบยาโคบี
(ch3_Jacobilter.sci)

```

A =
    4. - 4.    0.
   - 1.    4. - 2.
    0. - 2.    4.
B =
   400.
   400.
   400.
X0 =
   100.
   100.
   100.
ERR =
    0.05
Jacobi Iteration...
Iteration X1 X2 X3
 1  200.00 175.00 150.00
 2  275.00 225.00 187.50
 3  325.00 262.50 212.50
 4  362.50 287.50 231.25
 5  387.50 306.25 243.75
 6  406.25 318.75 253.13
 7  418.75 328.13 259.38
 8  428.13 334.38 264.06
 9  434.38 339.06 267.19
10  439.06 342.19 269.53
11  442.19 344.53 271.09
12  444.53 346.09 272.27
13  446.09 347.27 273.05
14  447.27 348.05 273.63
15  448.05 348.63 274.02
16  448.63 349.02 274.32
17  449.02 349.32 274.51

```

18 449.32 349.51 274.66

19 449.51 349.66 274.76

X =

449.51172

349.6582

274.75586

การคำนวณด้วยเครื่องคิดเลขของ

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{bmatrix}$$

จัดสมการได้เป็น

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \\ \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}} \\ \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}} \end{bmatrix}$$

หาครั้งที่ 1

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{400 - (-4)(100) - (0)(100)}{(4)} \\ \frac{400 - (-1)(100) - (-2)(100)}{(4)} \\ \frac{400 - (0)(100) - (-2)(100)}{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 175 \\ 150 \end{bmatrix}$$

หาครั้งที่ 2

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{400 - (-4)(175)}{(4)} \\ \frac{400 - (-1)(200) - (-2)(150)}{(4)} \\ \frac{400 - (-2)(175)}{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 275 \\ 225 \\ 187.5 \end{bmatrix}$$

หาครั้งที่ 3

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{400 - (-4)(225)}{(4)} \\ \frac{400 - (-1)(275) - (-2)(187.5)}{(4)} \\ \frac{400 - (-2)(225)}{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 325 \\ 262.5 \\ 212.5 \end{bmatrix}$$

หาครั้งที่ 4

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{400 - (-4)(262.5)}{(4)} \\ \frac{400 - (-1)(325) - (-2)(212.5)}{(4)} \\ \frac{400 - (-2)(262.5)}{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 362.5 \\ 287.5 \\ 231.25 \end{bmatrix}$$

3.2.7 โปรแกรมระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดล ผลการทำงาน และการคำนวณด้วยเครื่องคิดเลข

```
function X=GSeidel(A,B,X0,ERR)
N=size(A,1);
printf('Gauss Seidel Iteration...\nIteration ');
for l=1:N printf(' X%d ',l); end
printf('\n');
X=X0;
Reached=0;
Iter=1;
while ~Reached
    printf(' %d ',Iter);
    X0=X;
    for l=1:N
        Sum=B(l);
        for J=1:N
            if l~=J
                Sum=Sum-A(l,J)*X(J);
            end
        end
        X(l)=Sum/A(l,l);
        printf(' %.2f ',X(l));
    end
    printf('\n');
    Reached=1;
end
```

```

        for l=1:N
            if abs((X(l)-X0(l))*100/(X(l)))>ERR
                Reached=0;
                break;
            end
        end
        lter=lter+1;
        if lter>100
            fprintf('Divergence.\n');
            break;
        end
    end
end
endfunction

```

รูปที่ 3.22 โปรแกรมระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดล (ch3_Gseidel.sci)

```

A=[ 4 -4 0;
    -1 4 -2;
    0 -2 4]
B=[ 400;
    400;
    400]
X0=[ 100;
    100;
    100]
ERR=0.05
X=GSeidel(A,B,X0,ERR)

```

รูปที่ 3.23 ตัวอย่างโปรแกรมสั่งการคำนวณด้วยระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดล (ch3_GseidelIter.sci)

```

A =
    4. - 4.  0.
   - 1.  4. - 2.
    0. - 2.  4.

B =
    400.
    400.
    400.

X0 =
    100.

```

100.
100.
ERR =
0.05
Gauss Seidel Iteration...
Iteration X1 X2 X3
1 200.00 200.00 200.00
2 300.00 275.00 237.50
3 375.00 312.50 256.25
4 412.50 331.25 265.63
5 431.25 340.63 270.31
6 440.63 345.31 272.66
7 445.31 347.66 273.83
8 447.66 348.83 274.41
9 448.83 349.41 274.71
10 449.41 349.71 274.85
11 449.71 349.85 274.93
12 449.85 349.93 274.96
X =
449.85352
349.92676
274.96338

การคำนวณด้วยเครื่องคิดเลขของ

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{bmatrix}$$

จัดสมการให้

$$\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k}{a_{11}} \\ \frac{b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k}{a_{22}} \\ \frac{b_3 - a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1}}{a_{33}} \end{bmatrix}$$

หาครั้งที่ 1

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{400 - (-4)(100) - (0)(100)}{(4)} \\ \frac{400 - (-1)(200) - (-2)(100)}{(4)} \\ \frac{400 - (0)(200) - (-2)(200)}{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 200 \\ 200 \end{bmatrix}$$

หาครั้งที่ 2

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{400 - (-4)(200)}{(4)} \\ \frac{400 - (-1)(300) - (-2)(200)}{(4)} \\ \frac{400 - (-2)(275)}{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 275 \\ 237.5 \end{bmatrix}$$

หาครั้งที่ 3

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{400 - (-4)(275)}{(4)} \\ \frac{400 - (-1)(375) - (-2)(237.5)}{(4)} \\ \frac{400 - (-2)(312.5)}{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 375 \\ 312.5 \\ 256.25 \end{bmatrix}$$

หาครั้งที่ 4

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{400 - (-4)(312.5)}{(4)} \\ \frac{400 - (-1)(412.5) - (-2)(256.25)}{(4)} \\ \frac{400 - (-2)(331.25)}{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 412.5 \\ 331.25 \\ 265.63 \end{bmatrix}$$

3.2.8 โปรแกรมระเบียบวิธีการผ่อนปรนเกินสืบเนื่อง ผลการทำงาน และการคำนวณด้วยเครื่องคิดเลข

```
function X=SOR(A,B,X0,ERR,LAM)
N=size(A,1);
printf('SOR Iteration...\nIteration ');
for I=1:N printf(' X%d ',I); end
printf('\n');
X=X0;
```

```

Reached=0;
Iter=1;
while ~Reached
    printf(' %d ',Iter);
    X0=X;
    for I=1:N
        Sum=B(I);
        for J=1:N
            if I~=J
                Sum=Sum-A(I,J)*X(J);
            end
        end
        X(I)= LAM*Sum/A(I,I)+(1-LAM)*X(I);
        printf(' %.2f ',X(I));
    end
    printf('\n');
    Reached=1;
    for I=1:N
        if abs((X(I)-X0(I))*100/(X(I)))>ERR
            Reached=0;
            break;
        end
    end
    Iter=Iter+1;
    if Iter>100
        printf('Divergence.\n');
        break;
    end
end
endfunction

```

รูปที่ 3.24 โปรแกรมระเบียบวิธีการผ่อนปรนเกินสืบนี้อง (ch3_ SOR.sci)

```

A=[ 4 -4 0;
    -1 4 -2;
    0 -2 4]
B=[ 400;
    400;
    400]
X0=[ 100;
    100;
    100]

```

```

ERR=0.05
LAM=1.2
X=SOR(A,B,X0,ERR,LAM)

```

รูปที่ 3.25 ตัวอย่างโปรแกรมสั่งการคำนวณด้วยระเบียบวิธีการผ่อนปรนเกินสืบนี้อง
(ch3_SORIter.sci)

```

A =
    4. - 4.  0.
   - 1.  4. - 2.
    0. - 2.  4.
B =
    400.
    400.
    400.
X0 =
    100.
    100.
    100.
ERR =
    0.05
--> LAM =
    1.2
SOR Iteration...
Iteration X1 X2 X3
1  220.00 226.00 235.60
2  347.20 320.32 265.07
3  434.94 345.46 274.26
4  447.57 349.74 274.99
5  450.17 350.10 275.06
6  450.08 350.04 275.01
X =
    450.08231
    350.04156
    275.01286

```

การคำนวณด้วยเครื่องคิดเลขของ

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{bmatrix}$$

จัดสมการได้เป็น

$$\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k}{a_{11}} \\ \frac{b_2 - a_{21}(\lambda x_1^{k+1*} + (1-\lambda)x_1^k) - a_{23}x_3^k}{a_{22}} \\ \frac{b_3 - a_{31}(\lambda x_1^{k+1*} + (1-\lambda)x_1^k) - a_{32}(\lambda x_2^{k+1*} + (1-\lambda)x_2^k)}{a_{33}} \end{bmatrix}$$

หาครั้งที่ 1

$$\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{400 - (-4)*100}{4} \\ \frac{400 - (-1)((1.2*200) + (1-1.2)*100) - (-2)*100}{4} \\ \frac{400 - (-2)((1.2*200) + (1-1.2)*100)}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 205 \\ 213 \end{bmatrix}$$

และปรับปรุงค่า

$$\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ((1.2*200) + (1-1.2)*100) \\ ((1.2*205) + (1-1.2)*100) \\ ((1.2*213) + (1-1.2)*100) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 \\ 226 \\ 235.6 \end{bmatrix}$$

หาครั้งที่ 2

$$\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{400 - (-4)*226}{4} \\ \frac{400 - (-1)((1.2*326) + (1-1.2)*220) - (-2)*235.6}{4} \\ \frac{400 - (-2)((1.2*304.6) + (1-1.2)*226)}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 326 \\ 304.6 \\ 260.16 \end{bmatrix}$$

และปรับปรุงค่า

$$\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ((1.2*326) + (1-1.2)*220) \\ ((1.2*304.6) + (1-1.2)*226) \\ ((1.2*260.16) + (1-1.2)*235.6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 347.2 \\ 320.32 \\ 265.07 \end{bmatrix}$$

หาครั้งที่ 3

$$\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{400 - (-4) * 320.32}{4} \\ \frac{400 - (-1)((1.2 * 420.32) + (1 - 1.2) * 347.2) - (-2) * 265.07}{4} \\ \frac{400 - (-2)((1.2 * 341.27) + (1 - 1.2) * 320.32)}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 420.32 \\ 341.27 \\ 272.73 \end{bmatrix}$$

และปรับปรุงค่า

$$\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ((1.2 * 420.32) + (1 - 1.2) * 347.2) \\ ((1.2 * 341.27) + (1 - 1.2) * 320.32) \\ ((1.2 * 272.73) + (1 - 1.2) * 265.07) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 434.94 \\ 345.46 \\ 274.26 \end{bmatrix}$$

หาครั้งที่ 4

$$\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{400 - (-4) * 345.46}{4} \\ \frac{400 - (-1)((1.2 * 445.46) + (1 - 1.2) * 434.94) - (-2) * 274.26}{4} \\ \frac{400 - (-2)((1.2 * 349.02) + (1 - 1.2) * 345.46)}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 445.46 \\ 349.02 \\ 274.87 \end{bmatrix}$$

และปรับปรุงค่า

$$\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ((1.2 * 445.46) + (1 - 1.2) * 434.94) \\ ((1.2 * 349.02) + (1 - 1.2) * 345.46) \\ ((1.2 * 274.87) + (1 - 1.2) * 274.26) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 447.57 \\ 349.74 \\ 274.99 \end{bmatrix}$$

3.3 การประมาณค่าในช่วง

3.3.1 โปรแกรมฟังก์ชันพหุนามของลากรานจ์ ผลการทำงาน และการคำนวณด้วยเครื่องคิดเลข

```
function fmX=Lagrange(DAT,XX)
N=size(DAT,1);
Nx=size(XX,1);
fmX=zeros(Nx,1);
for K=1:Nx;
    fmX(K)=0;
    for l=1:N
        AL=1.0;
        for J=1:N
            if J~=l
                AL=AL*(XX(K)-DAT(J,1))/(DAT(l,1)-DAT(J,1));
            end
        end
        fmX(K)=fmX(K)+AL*DAT(l,2);
    end
end
endfunction
```

รูปที่ 3.26 โปรแกรมฟังก์ชันพหุนามของลากรานจ์ (ch3_Lagrange.sci)

```
DAT=[ 1 0;
      4 1.386294];
XX=[2 ]';
fmX=Lagrange(DAT,XX)

DAT=[ 1 0;
      4 1.386294;
      5 1.609438 ];
XX=[2 ]';
fmX=Lagrange(DAT,XX)

DAT=[ 1 0;
      4 1.386294;
      5 1.609438;
      6 1.791759 ];
XX=[2 ]';
fmX=Lagrange(DAT,XX)
```

รูปที่ 3.27 ตัวอย่างโปรแกรมสั่งการคำนวณด้วยฟังก์ชันพหุนามของลากรานจ์ (ch3_LagPol1.sci)

fmX =
0.462098
fmX =
0.581575
fmX =
0.6287674

การคำนวณด้วยเครื่องคิดเลขเมื่อใช้ระเบียบวิธีฟังก์ชันพหุนามลากรางจ์ สร้างสมการพหุนามอันดับ 1 และ 3 จากจุดของข้อมูลฟังก์ชัน $y = \ln(x)$ ดังตารางข้างล่าง พร้อมทั้งหาค่าของสมการพหุนามที่ได้เมื่อกำหนดให้ $x=2$

x	1	4	5	6
ln(x)	0	1.386294	1.609438	1.791759

การประมาณค่า ในช่วงเชิงเส้น	$f(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)$ $L_0(x) = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \Rightarrow L_0(x) = \frac{4 - x}{4 - 1}$ $L_1(x) = \frac{x_0 - x}{x_0 - x_1} \Rightarrow L_1(x) = \frac{1 - x}{1 - 4}$ $f(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)$ $= \frac{(4 - x)}{3}(0) + \frac{(1 - x)}{(-3)}(1.386294)$ แทนค่า $x=2$ จะได้ $f(2) = \frac{(4 - 2)}{3}(0) + \frac{(1 - 2)}{(-3)}(1.386294) = 0.462098$
การประมาณค่า ในช่วงเชิงกำลัง สอง	$f(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$ $L_0(x) = \frac{(x_2 - x)(x_1 - x)}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)} \Rightarrow L_0(x) = \frac{(5 - x)(4 - x)}{(5 - 1)(4 - 1)}$ $L_1(x) = \frac{(x_2 - x)(x_0 - x)}{(x_2 - x_1)(x_0 - x_1)} \Rightarrow L_1(x) = \frac{(5 - x)(1 - x)}{(5 - 4)(1 - 4)}$ $L_2(x) = \frac{(x_1 - x)(x_0 - x)}{(x_1 - x_2)(x_0 - x_2)} \Rightarrow L_2(x) = \frac{(4 - x)(1 - x)}{(4 - 5)(1 - 5)}$ $f(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$ $= \frac{(5 - x)(4 - x)}{(5 - 1)(4 - 1)}(0) + \frac{(5 - x)(1 - x)}{(5 - 4)(1 - 4)}(1.386294)$ $+ \frac{(4 - x)(1 - x)}{(4 - 5)(1 - 5)}(1.609438)$ แทนค่า $x=2$ จะได้

	$ \begin{aligned} f(2) &= L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2) \\ &= \frac{(5-2)(4-2)}{(5-1)(4-1)}(0) + \frac{(5-2)(1-2)}{(5-4)(1-4)}(1.386294) \\ &\quad + \frac{(4-2)(1-2)}{(4-5)(1-5)}(1.609438) \\ &= 0.581575 \end{aligned} $
การประมาณค่า ในช่วงฟังก์ชันพหุนาม	$ \begin{aligned} f(x) &= L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2) + L_3(x) f(x_3) \\ L_0(x) &= \frac{(x_3-x)(x_2-x)(x_1-x)}{(x_3-x_0)(x_2-x_0)(x_1-x_0)} \Rightarrow L_0(x) = \frac{(6-x)(5-x)(4-x)}{(6-1)(5-1)(4-1)} \\ L_1(x) &= \frac{(x_3-x)(x_2-x)(x_0-x)}{(x_3-x_1)(x_2-x_1)(x_0-x_1)} \Rightarrow L_1(x) = \frac{(6-x)(5-x)(1-x)}{(6-4)(5-4)(1-4)} \\ L_2(x) &= \frac{(x_3-x)(x_1-x)(x_0-x)}{(x_3-x_2)(x_1-x_2)(x_0-x_2)} \Rightarrow L_2(x) = \frac{(6-x)(4-x)(1-x)}{(6-5)(4-5)(1-5)} \\ L_3(x) &= \frac{(x_2-x)(x_1-x)(x_0-x)}{(x_2-x_3)(x_1-x_3)(x_0-x_3)} \Rightarrow L_3(x) = \frac{(5-x)(4-x)(1-x)}{(5-6)(4-6)(1-6)} \\ \\ f(x) &= L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2) + L_3(x) f(x_3) \\ &= \frac{(6-x)(5-x)(4-x)}{(6-1)(5-1)(4-1)}(0) + \frac{(6-x)(5-x)(1-x)}{(6-4)(5-4)(1-4)}(1.386294) \\ &= \frac{(6-x)(4-x)(1-x)}{(6-5)(4-5)(1-5)}(1.609438) + \frac{(5-x)(4-x)(1-x)}{(5-6)(4-6)(1-6)}(1.791759) \\ \\ \text{แทนค่า } x=2 \text{ จะได้} \\ f(2) &= L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2) + L_3(x) f(x_3) \\ &= \frac{(6-x)(5-x)(4-x)}{(6-1)(5-1)(4-1)}(0) + \frac{(6-x)(5-x)(1-x)}{(6-4)(5-4)(1-4)}(1.386294) \\ &= \frac{(6-x)(4-x)(1-x)}{(6-5)(4-5)(1-5)}(1.609438) + \frac{(5-x)(4-x)(1-x)}{(5-6)(4-6)(1-6)}(1.791759) \\ &= 0.6287674 \end{aligned} $

3.3.2 โปรแกรมผลต่างจากการแบ่งย่อยของนิวตัน ผลการทำงาน และการคำนวณด้วยเครื่องคิดเลข

```
function fxC=NewtonCoef(DAT)
N=size(DAT,1);
X=zeros(N,1);
fx=zeros(N,N);
for l=1:N
    X(l)=DAT(l,1);
    fx(l,1)=DAT(l,2);
end
for l=2:N
    for J=1:N-l+1
        fx(J,l)=fx(J+1,l-1)-fx(J,l-1);
        fx(J,l)=fx(J,l)/(X(J+1)-X(J));
    end
end
fxC=fx(1,1:N);
endfunction
```

รูปที่ 3.28 โปรแกรมผลต่างจากการแบ่งย่อยของนิวตัน (ch3_ NewtonCoef.sci)

```
function fx=NewtonEval(fxC,DAT,XX)
Nx=size(XX,1);
Nc=size(fxC,1);
fx=zeros(Nx,1);
for J=1:Nx;
    fx(J)=fxC(1);
    FAC=1.0;
    for l=2:Nc
        FAC=FAC*(XX(J)-DAT(l-1,1));
        fx(J)=fx(J)+fxC(l)*FAC;
    end
end
endfunction
```

รูปที่ 3.29 โปรแกรมจำลองสมการที่ได้จากผลต่างจากการแบ่งย่อยของนิวตัน (ch3_ NewtonEval.sci)

```
DAT=[ 1 0;
      4 1.386294 ];
fxC=NewtonCoef(DAT)
XX=[2 ];
fx=NewtonEval(fxC,DAT,XX)
```

```

DAT=[ 1 0;
      4 1.386294;
      5 1.609438 ];
fxC=NewtonCoef(DAT)
XX=[2 ];
fx=NewtonEval(fxC,DAT,XX)

DAT=[ 1 0;
      4 1.386294;
      5 1.609438;
      6 1.791759 ];
fxC=NewtonCoef(DAT)
XX=[2 ];
fx=NewtonEval(fxC,DAT,XX)

```

รูปที่ 3.30 ตัวอย่างโปรแกรมสั่งการคำนวณด้วยผลต่างจากการแบ่งย่อยของนิวตัน
(ch3_Newton4.sci)

```

fxC =
    0.
    0.462098
fx =
    0.462098
fxC =
    0.
    0.462098
    - 0.0597385
fx =
    0.581575
fxC =
    0.
    0.462098
    - 0.0597385
    0.0078654
fx =
    0.6287674

```

การคำนวณด้วยเครื่องคิดเลขเมื่อใช้ผลต่างจากการแบ่งย่อยของนิวตัน สร้างสมการพหุนามอันดับ 1 2 และ 3 จากจุดของข้อมูลฟังก์ชัน $y = \ln(x)$ ดังตารางข้างล่าง พร้อมทั้งหาค่าของสมการพหุนามที่ได้เมื่อกำหนดให้ $x=2$

x	1	4	5	6
ln(x)	0	1.386294	1.609438	1.791759

การประมาณค่า ในช่วงเชิงเส้น	$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}$ แทนค่า $x=2$ จะได้ $f(2) = (0) + (2-1) \frac{(1.386294) - (0)}{(4-1)} = 0.462098$
การประมาณค่า ในช่วงเชิงกำลัง สอง	$f(x) = C_0(x) + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)(x - x_1)$ $C_0 = f(x_0) = 0$ $C_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{(1.386294) - (0)}{(4-1)} = 0.462098$ $C_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}}{(x_2 - x_0)} = \frac{\frac{(1.609438) - (1.386294)}{(5-4)} - \frac{(1.386294) - (0)}{(4-1)}}{(5-1)} = -0.0597385$ แทนค่า $x=2$ จะได้ $f(x) = (0) + (0.462098)(x - x_0) + (-0.0597385)(x - x_0)(x - x_1)$ $f(2) = (0) + (0.462098)(2-1) + (-0.0597385)(2-1)(2-4) = 0.581575$
การประมาณค่า ในช่วงฟังก์ชันพหุนาม	$f(x) = C_0(x) + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)(x - x_1) + C_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$ $C_0 = f(x_0) = 0$ $C_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{(1.386294) - (0)}{(4-1)} = 0.462098$ $C_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}}{(x_2 - x_0)} = \frac{\frac{(1.609438) - (1.386294)}{(5-4)} - \frac{(1.386294) - (0)}{(4-1)}}{(5-1)} = -0.0597385$ $C_3 = \frac{\frac{\frac{f(x_3) - f(x_2)}{(x_3 - x_2)} - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)}}{(x_3 - x_1)} - \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}}{(x_2 - x_0)}}{(x_3 - x_0)}$ $= \frac{\frac{\frac{(1.791759 - 1.609438)}{(6-5)} - \frac{(1.609438 - 1.386294)}{(5-4)}}{(6-4)} - \frac{\frac{(1.609438 - 1.386294)}{(5-4)} - \frac{(1.386294 - 0)}{(4-1)}}{(5-1)}}{(6-1)} = 0.0078654$ แทนค่า $x=2$ จะได้ $f(2) = 0(2) + 0.462098(2-1) + (-0.0597385)(2-1)(2-4) + 0.0078654(2-1)(2-4)(2-5) = 0.6287674$

บทที่ 4

ผลการจำลองและการวิเคราะห์ผล

ในบทนี้จะกล่าวถึงผลการจำลองของโปรแกรม SCILAB เปรียบเทียบกันในแต่ละระเบียบวิธี โดยแยกเป็นตารางตามหัวข้อ การหารากของสมการ การแก้ระบบสมการเชิงเส้น และการประมาณค่าในช่วง

4.1 การหารากของสมการ

ตาราง 4.1 การหาค่ารากของสมการ $f(x) = e^{-\frac{x}{4}}(2-x) - 1 = 0$ โดยเปรียบเทียบกันแต่ละวิธี

ระเบียบวิธีการ แบ่งครึ่งช่วง	ระเบียบวิธีการ วางตัวผิดที่	ระเบียบวิธีการ ทำซ้ำแบบหนึ่งจุด	ระเบียบวิธีของนิวตัน-ราฟสัน	ระเบียบวิธี เซแคนต์
ITERATION XM	ITERATION Xf	ITERATION XNEW	ITERATION XNEW	ITERATION XNEW
1 1.00000	1 1.00000	1 1.00000	1 0.66667	1 -0.11700
2 0.50000	2 0.81887	2 0.71597	2 0.78065	2 1.02883
3 0.75000	3 0.78925	3 0.80399	3 0.78359	3 0.82909
4 0.87500	4 0.78450	4 0.77738	4 0.78360	4 0.78106
5 0.81250	5 0.78374	5 0.78549		5 0.78362
6 0.78125	6 0.78362	6 0.78302		6 0.78360
7 0.79688	7 0.78360	7 0.78377		7 0.78360
8 0.78906	8 0.78360	8 0.78354		
9 0.78516		9 0.78361		
10 0.78320		10 0.78359		
11 0.78418		11 0.78360		
12 0.78369				
13 0.78345				
14 0.78357				
15 0.78363				
16 0.78360				
17 0.78358				
18 0.78359				
19 0.78360				

จากตาราง 4.1 สรุปได้ว่าระเบียบวิธีของนิวตัน-ราฟสันใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยที่สุดคือ 4 รอบ ในขณะที่ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วงใช้จำนวนรอบการคำนวณมากที่สุดคือ 19 รอบ สำหรับผลการคำนวณทุกวิธีมีค่าถูกต้องตรงกันคือ 0.78360

4.2 การแก้ระบบสมการเชิงเส้น

ตาราง 4.2 การแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยเปรียบเทียบกันแต่ละวิธี

ระเบียบวิธีการ กำจัดแบบเกาส์	ระเบียบวิธีของ เกาส์-จอร์แดน	ระเบียบวิธีการทำ เมทริกซ์ผกผัน	ระเบียบวิธีการ แยกแบบแอลยู	ระเบียบวิธีการ แยกแบบไชลีสกี
$A =$ $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ $B =$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ $X =$ $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$A =$ $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ $B =$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ $D =$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$	$A =$ $\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ $B =$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B1 =$ $\begin{bmatrix} 0.375 & 0.5 & 0.25 \\ 0.125 & 0.5 & 0.25 \\ 0.0625 & 0.25 & 0.375 \end{bmatrix}$ $A1 =$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$A =$ $\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ $B =$ $\begin{bmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{bmatrix}$ $X =$ $\begin{bmatrix} 450 \\ 350 \\ 275 \end{bmatrix}$	$A =$ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ $B =$ $\begin{bmatrix} 100 \\ 400 \\ 400 \end{bmatrix}$ $X =$ $\begin{bmatrix} 450 \\ 350 \\ 275 \end{bmatrix}$

จากตาราง 4.2 สรุปได้ว่าระเบียบวิธีแต่ละวิธีสามารถใช้แก้ระบบสมการเชิงเส้นได้อย่างถูกต้อง

ตาราง 4.3 การแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยเปรียบเทียบกันแต่ละวิธีการทำซ้ำ

ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบ ยาโคบี	ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบ เกาส์-ไซเดล	ระเบียบวิธีการผ่อนปรนเกิน สี่บ่ง
$A =$ $\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ $B =$ $\begin{bmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{bmatrix}$ $X_0 =$ $\begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}$ $ERR =$ 0.05 Jacobi Iteration... Iteration X1 X2 X3 1 200.00 175.00 150.00 2 275.00 225.00 187.50 3 325.00 262.50 212.50 4 362.50 287.50 231.25 5 387.50 306.25 243.75 6 406.25 318.75 253.13 7 418.75 328.13 259.38 8 428.13 334.38 264.06 9 434.38 339.06 267.19 10 439.06 342.19 269.53 11 442.19 344.53 271.09 12 444.53 346.09 272.27 13 446.09 347.27 273.05 14 447.27 348.05 273.63 15 448.05 348.63 274.02 16 448.63 349.02 274.32 17 449.02 349.32 274.51 18 449.32 349.51 274.66 19 449.51 349.66 274.76 $X =$ $\begin{bmatrix} 449.51172 \\ 349.6582 \\ 274.75586 \end{bmatrix}$	$A =$ $\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ $B =$ $\begin{bmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{bmatrix}$ $X_0 =$ $\begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}$ $ERR =$ 0.05 Gauss Seidel Iteration... Iteration X1 X2 X3 1 200.00 200.00 200.00 2 300.00 275.00 237.50 3 375.00 312.50 256.25 4 412.50 331.25 265.63 5 431.25 340.63 270.31 6 440.63 345.31 272.66 7 445.31 347.66 273.83 8 447.66 348.83 274.41 9 448.83 349.41 274.71 10 449.41 349.71 274.85 11 449.71 349.85 274.93 12 449.85 349.93 274.96 $X =$ $\begin{bmatrix} 449.85352 \\ 349.92676 \\ 274.96338 \end{bmatrix}$	$A =$ $\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ $B =$ $\begin{bmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{bmatrix}$ $X_0 =$ $\begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}$ $ERR =$ 0.05 $LAM =$ 1.2 SOR Iteration... Iteration X1 X2 X3 1 220.00 226.00 235.60 2 347.20 320.32 265.07 3 434.94 345.46 274.26 4 447.57 349.74 274.99 5 450.17 350.10 275.06 6 450.08 350.04 275.01 $X =$ $\begin{bmatrix} 450.08231 \\ 350.04156 \\ 275.01286 \end{bmatrix}$

จากตาราง 4.3 สรุปได้ว่าระเบียบวิธีการผ่อนปรนเกินสืบเนื่องใช้จำนวนรอบการคำนวณน้อยที่สุดคือ 6 รอบ ในขณะที่ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบยาโคบีใช้จำนวนรอบการคำนวณมากที่สุดคือ 19 รอบ สำหรับผลการคำนวณทุกวิธีมีค่าใกล้เคียงกันโดยมีความผิดพลาดน้อยกว่า 1%

4.3 การประมาณค่าในช่วง

ตาราง 4.4 การประมาณค่าในช่วงของ $x=2$ โดยฟังก์ชันพหุนามของลากรานจ์

การประมาณค่า ในช่วงเชิงเส้น	การประมาณค่าในช่วง เชิงกำลังสอง	การประมาณค่าในช่วง ฟังก์ชันพหุนาม
DAT= [1 0; 4 1.386294]; fmX = 0.462098	DAT= [1 0; 4 1.386294; 5 1.609438]; fmX = 0.581575	DAT= [1 0; 4 1.386294; 5 1.609438; 6 1.791759]; fmX = 0.6287674

จากตาราง 4.4 สรุปได้ว่าการประมาณค่าในช่วงโดยใช้ฟังก์ชันพหุนามมีความถูกต้องมากที่สุด เมื่อค่าของ $\ln(2) = 0.6931472$ ซึ่งมีความผิดพลาด 9.3%

ตาราง 4.5 การประมาณค่าในช่วงของ $x=2$ โดยผลต่างจากการแบ่งย่อยของนิวตัน

การประมาณค่า ในช่วงเชิงเส้น	การประมาณค่าในช่วง เชิงกำลังสอง	การประมาณค่าในช่วง ฟังก์ชันพหุนาม
DAT= [1 0; 4 1.386294]; fmX = 0.462098	DAT= [1 0; 4 1.386294; 5 1.609438]; fmX = 0.581575	DAT= [1 0; 4 1.386294; 5 1.609438; 6 1.791759]; fmX = 0.6287674

จากตาราง 4.5 สรุปได้ว่าการประมาณค่าในช่วงโดยใช้ฟังก์ชันพหุนามมีความถูกต้องมากที่สุด เมื่อค่าของ $\ln(2) = 0.6931472$ ซึ่งมีความผิดพลาด 9.3% และผลการคำนวณที่ได้ของทั้งฟังก์ชันพหุนามของลากรานจ์และผลต่างจากการแบ่งย่อยของนิวตันมีความถูกต้องตรงกัน

บทที่ 5

สรุปผล

จากการประยุกต์ใช้โปรแกรม SCILAB กับการสอนวิชาการระเบียบวิธีเชิงตัวเลข สามารถสรุปผลที่สำคัญได้เป็นข้อๆ ดังนี้

1. โปรแกรม SCILAB มีการสั่งงานและสภาพการใช้งานคล้ายโปรแกรม MATLAB แต่ไม่มีค่าใช้จ่ายเพราะเป็นโปรแกรมที่ไม่คิดค่าลิขสิทธิ์ ซึ่งมีความสามารถในการคำนวณแบบเมทริกซ์และมีโครงสร้างการเขียนโปรแกรมคล้ายภาษา C จึงเหมาะสมกับสภาพการเรียนที่มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิในการนำเอาโปรแกรม SCILAB มาใช้ในการสอน
2. การเขียนผังงานการทำงานแบบรูปภาพเพื่อให้เข้าใจการทำงานเบื้องต้น และการคำนวณด้วยเครื่องคิดเลขอย่างน้อย 3 - 4 รอบการทำซ้ำโดยมีวัตถุประสงค์เพื่อตรวจสอบการคำนวณให้ถูกต้องตรงกันทั้งอัลกอริธึม ผังงานการทำงานแบบรูปภาพและชุดโปรแกรมการคำนวณนั้น มีความสำคัญต่อนักศึกษาในการเรียนรู้ด้วยตัวเองได้ง่ายขึ้น
3. ผลลัพธ์ที่ได้จากการจำลองด้วยโปรแกรม SCILAB ให้ผลลัพธ์ที่ถูกต้องตรงกันกับการคำนวณด้วยเครื่องคิดเลขและโปรแกรม MATLAB [3]

บรรณานุกรม

- [1] Gilberto E. Urroz, “IntroductionSCILAB”, 2007.
- [2] ปิยะ โควินท์ทวีวัฒน์, “คู่มือโปรแกรมภาษา SCILAB สำหรับผู้เริ่มต้น”, มหาวิทยาลัยราชภัฏนครปฐม, 2551
- [3] ปราโมทย์ เตชะอำไพ และ นิพนธ์ วรรณโสภากย์, “ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม”, พิมพ์ครั้งที่ 6, สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2551
- [4] สุชาติ จันทร์จรมานิตย์, “ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับงานวิศวกรรม”, มหาวิทยาลัยราชภัฏวชิรญาณ, 2554

สวพ.
มทร.สุวรรณภูมิ